Real Sociedad Española de Física

R.S.E.F.

XXXII Olimpiada ESPAÑOLA DE FÍSICA

Medidas y gráficas

Comment on mesure la hauteur de la colonne barométrique.

Apuntes de supervivencia

Los errores conceptuales que hayan podido deslizarse aquí, habrán de atribuirse a que no siempre presté la debida atención a las enseñanzas que Pepe Tornos me transmitió durante bastantes años.

Alejandro del Mazo Vivar

CONTENIDO

1. Medida de magnitudes 3
- 1.1. Nociones de cifras significativas 3
- 1.2. Cifras significativas en operaciones 3
  - 1.2.1. Adición y sustracción 3
  - 1.2.2. Multiplicación y división 3
  - 1.2.3. Logaritmos 4
- 1.3. Redondeo 4
- 1.4. Medidas 5
  - 1.4.1. Exactitud 5
  - 1.4.2. Precisión 5
  - 1.4.3. Resolución de un instrumento 6
- 1.5. Error 6
  - 1.5.1. Error absoluto 6
  - 1.5.2. Error relativo 6
  - 1.5.3. Causas de error 7
- 1.6. Incertidumbre 7
  - 1.6.1. Significado de la incertidumbre 7
  - 1.6.2. Incertidumbre de una medida directa 7
  - 1.6.3. Incertidumbre de *n* medidas directas 8
  - 1.6.4. Incertidumbre de medidas indirectas 9
  - 1.6.5. Solución de urgencia para cálculo de incertidumbres 12

2. Gráficas y ecuaciones 13
- 2.1. Representaciones gráficas 13
- 2.2. Elementos de una gráfica 14
- 2.3. Linealización de ecuaciones 16
  - 2.3.1. Linealización por cambio de variable 16
  - 2.3.2. Linealización logarítmica 17

3. Resolución de problemas experimentales 18
- 3.1. Obtención del valor de la componente horizontal del campo magnético terrestre 18
  - 3.1.1. Planteamiento del problema 18
  - 3.1.2. Resolución 19
- 3.2. Estudio del proceso de carga de un condensador a través de una resistencia, y deducción de la capacidad del condensador 24
  - 3.2.1. Planteamiento del problema 24
  - 3.2.2. Resolución 25

1 Medida de magnitudes

1.1. Noción de cifra significativa

Una cantidad se puede expresar con distintos números, dependiendo de la precisión del instrumento que se utilice. Cifras significativas son todas aquellas que se escriben a partir de la primera cifra que no es cero.

EJEMPLOS

Número	Cifras significativas
142,7	cuatro
$1{,}427 \times 10^2$	cuatro
$1{,}4270 \times 10^2$	cinco
0,000630	tres

1.2. Cifras significativas en operaciones

1.2.1. Adición y sustracción

El resultado debe tener el mismo número de cifras decimales que la cantidad con menor número de decimales.

EJEMPLOS

$$\begin{array}{r} 3{,}2 \\ 4{,}11 \\ +\ \underline{1{,}6} \\ 8{,}91 \end{array} \rightarrow 8{,}9 \qquad \begin{array}{r} 26{,}1 \\ -\ \underline{4{,}379} \\ 21{,}721 \end{array} \rightarrow 21{,}7$$

1.2.2. Multiplicación y división

El resultado tiene el mismo número de cifras significativas que el factor de menor número de cifras significativas. Las potencias de diez no influyen en la cantidad de cifras que deben conservarse.

EJEMPLOS

$$\underbrace{2{,}3}_{2} \times \underbrace{2{,}58}_{3} = \underbrace{5{,}934}_{2} \rightarrow 5{,}9 \qquad \underbrace{1{,}19}_{3} \times \underbrace{0{,}47}_{2} \times \underbrace{328}_{3} = \underbrace{183{,}4504}_{2} \rightarrow 1{,}8 \times 10^2 \qquad \underbrace{15{,}8}_{3} : \underbrace{2{,}1}_{2} = \underbrace{7{,}523809524}_{2} \rightarrow 7{,}5$$

$$\underbrace{4{,}3179}_{5} \times 10^{12} \times \underbrace{3{,}5}_{2} \times 10^{-19} = \underbrace{1{,}511265}_{2} \times 10^{-6} \rightarrow 1{,}5 \times 10^{-6} \qquad \underbrace{34{,}59}_{4} : \underbrace{2{,}46287}_{6} = \underbrace{14{,}04459025}_{4} \rightarrow 14{,}044$$

1.2.3. Logaritmos

El número de cifras de la mantisa es igual a número de cifras del número.

EJEMPLOS

$$\log \underbrace{339}_{3} = 2,\underbrace{530}_{3}1996... \rightarrow 2,530$$

1.3. Redondeo

Redondeo de la última cifra:

a. Si la cifra a eliminar es mayor que 5, se añade una unidad a la penúltima cifra.

EJEMPLO

$$23,47 \rightarrow 23,5$$

b. Si la cifra a eliminar es menor que 5, se deja la penúltima cifra con su valor actual.

EJEMPLO

$$23,43 \rightarrow 23,4$$

c. Si la cifra a eliminar es igual a 5 y la penúltima cifra es impar, esta se incrementa en una unidad.

EJEMPLO

$$23,75 \rightarrow 23,8$$

d. Si la cifra a eliminar es igual a 5 y la penúltima cifra es par, esta se deja como está.

EJEMPLO

$$23,65 \rightarrow 23,6$$

EJERCICIOS

1. Indica cuántas cifras significativas hay en: a) 1,9030; b) 0,03810; c) $2,30\times10^4$

2. Redondea cada número a la cantidad de cifras significativas que se indica entre paréntesis.
   a) 1,2367 (a cuatro); b) 1,2384 (a cuatro); c) 0,1352 (a tres); d) 2,051 (a dos); e) 2,0050 (a tres)

3. Escribe cada respuesta con la cantidad correcta de cifras significativas.
   a) 1,021 + 2,69 = 3,711; b) 12,3 – 1,63 = 10,67; c) 4,34 × 9,2 = 39,928; d) 0,0602 : $(2,113\times10^4) = 2,84903\times10^{-6}$

4. Escribe cada resultado con la cantidad correcta de cifras significativas.

a) $1{,}0 + 2{,}100 + 3{,}4 + 5{,}8 = 12{,}300$ *(Sol.: 12,3)*
b) $106{,}900 - 31{,}4 = 75{,}500$ *(Sol. :75,5)*
c) $107{,}868 - (2{,}113\times10^{2}) + (5{,}623\times10^{3}) = 5519{,}568$ *(Sol. :5,520×10^{3})*
d) $(26{,}14/37{,}62) \times 4{,}38 = 3{,}043413078$ *(Sol. :3,04)*
e) $(26{,}14/37{,}62\times10^{8}) \times (4{,}38\times10^{-2}) = 3{,}043413\ldots\times10^{-10}$ *(Sol. :3,04×10^{-10})*
f) $(26{,}14/3{,}38) + 4{,}2 = 11{,}9337\ldots$ *(Sol. : 11,9)*
g) $\log (3{,}98\times10^{4}) = 4{,}599883\ldots$ *(Sol. : 4,600)*

1.4. Medidas

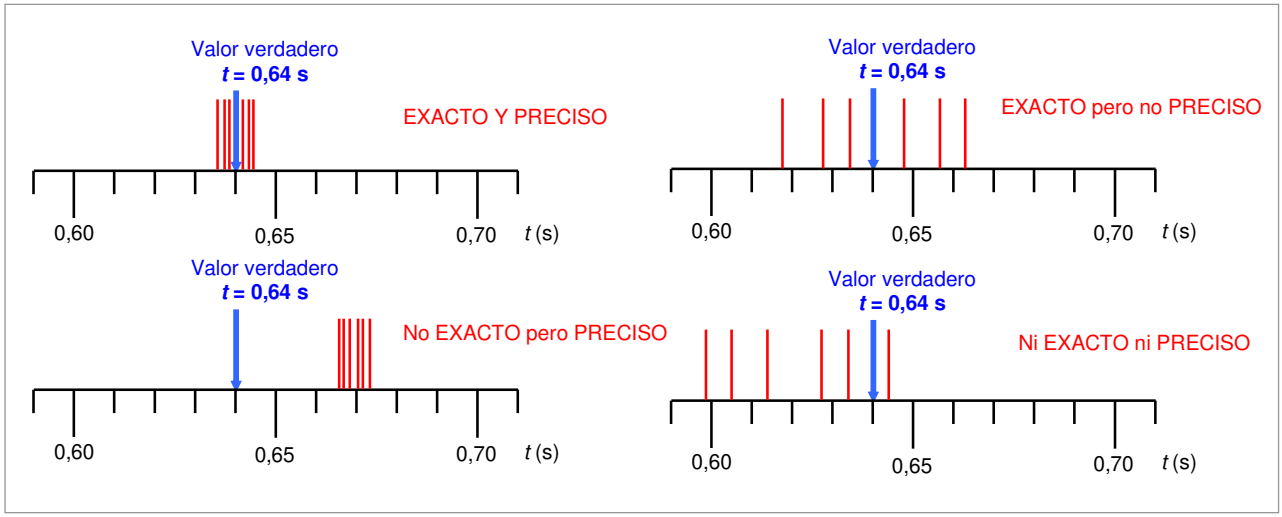
1.4.1. Exactitud

Representa la proximidad entre un valor medido y un valor verdadero de una magnitud.

1.4.2. Precisión

Representa la proximidad entre los valores obtenidos en mediciones repetidas bajo condiciones especificadas.

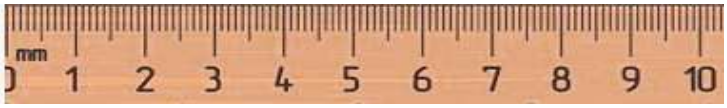
EJEMPLO
El valor verdadero de la duración de un evento es de 0,64 s. En cuatro situaciones diferentes se han hecho seis experimentos para determinarlo y los resultados se sitúan en la forma que se muestra en la figura (en cada situación, el valor verdadero se muestra con una marca azul y las medidas de los experimentos, con marcas de color rojo).
En cuanto a la exactitud y precisión, puede decirse lo siguiente respecto a los resultados:



1.4.3. Resolución de un instrumento

Es la mínima diferencia entre indicaciones visualizadas que puede percibirse de forma significativa.

EJEMPLO
La resolución de los instrumentos que se indican a continuación son.



REGLA
Resolución: 1 mm

VOLTÍMETRO
Resolución: 0,01 V

1.5. Error

1.5.1. Error absoluto, ε_a

Es la diferencia entre el valor medido de una magnitud y un valor de referencia.

$$\varepsilon_a = M' - M$$

ε_a : error absoluto
M' : valor medido
M : valor de referencia

El error absoluto puede ser positivo o negativo y tiene unidades.

1.5.2. Error relativo, ε_r

Es el cociente entre el error absoluto y el valor de referencia.

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{M}$$

Si se expresa en tanto por ciento se escribe:

$$\varepsilon_r = \frac{\varepsilon_a}{M} \cdot 100$$

El error relativo no tiene unidades.

EJEMPLO
La longitud de una pieza metálica, medida en un laboratorio de referencia es de 5,23 cm. Si una persona obtiene al medirla una longitud de 5,25 cm, calcula el error absoluto y relativo cometido.

$$\varepsilon_a = 5{,}25 - 5{,}23 = 0{,}02 \text{ cm}$$
$$\varepsilon_r = (0{,}02/5{,}23) \times 100 = 0{,}38\%$$

1.5.3. Causas de error

Error de precisión, ε_p. Es debida a la resolución del aparato. Viene dado por la división más pequeña de la escala.

Errores sistemáticos, ε_s. Son debidos al mal funcionamiento o calibración del aparato, por ejemplo, un reloj que atrasa. Se producen siempre en el mismo sentido, por exceso o por defecto, y pueden corregirse si se detectan (sumando o restando el error).

Errores accidentales o aleatorios, ε_{acc}. Son resultado de distintas fuentes incontrolables. Unas veces proporcionan errores por exceso y otras por defecto.

El **error total** de una medida es la combinación de los anteriores tipos de error.

Error total	=	error de precisión	+	error sistemático	+	error accidental
ε_a	=	ε_p	+	ε_s	+	ε_{acc}

Si domina uno de estos errores, el error total será ese.

1.6. Incertidumbre

1.6.1. Significado de la incertidumbre

Es un parámetro no negativo que caracteriza la dispersión de los valores de una magnitud.

Se expresa como:

$R \pm \Delta R$

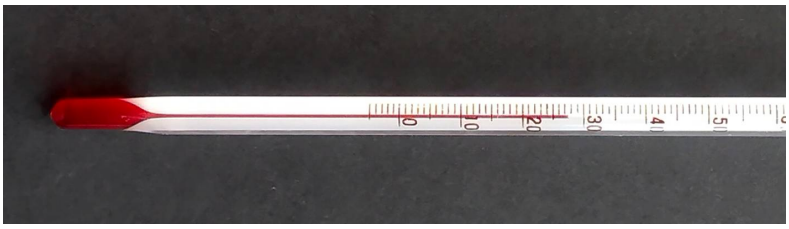
R: resultado más probable
ΔR: incertidumbre

1.6.2. Incertidumbre de una medida directa

La incertidumbre viene dada por el error de precisión del instrumento. $\Delta x = \varepsilon_p$

En instrumentos analógicos: ε_p = mitad de la división más pequeña.

EJEMPLO

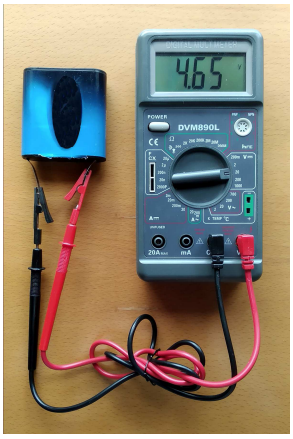


La temperatura que marca el termómetro es: $t \pm \Delta t = (27{,}5 \pm 0{,}5)$ ºC

En instrumentos digitales: ε_p = división más pequeña.

EJEMPLO
La fuerza electromotriz de la pila es:

$$\mathcal{E} \pm \Delta\mathcal{E} = (4{,}65 \pm 0{,}01)\ \text{V}$$



1.6.3. Incertidumbre de *n* medidas directas

Se han tomado n medidas $x_1, x_2, \ldots x_n$ correspondientes a un solo fenómeno, cuya media aritmética es:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots x_n}{n} = \frac{\Sigma x_n}{n}$$

La desviación estándar, σ, se expresa como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \ldots (x_n - \bar{x})^2}{n-1}} = \sqrt{\frac{\sum (x_n - \bar{x})^2}{n-1}}$$

La incertidumbre, Δx, es:

$$\Delta x = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

por lo que finalmente se tiene que:

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\sum (x_n - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

EJEMPLO
Se han tomado siete medidas del tiempo invertido por una bola metálica que rueda por un plano inclinado.

Tiempo (s): 5,23 5,30 5,41 5,27 5,43 5,19 5,25

Obtener el valor más probable del tiempo y su incertidumbre.

* * *

Medidas	t_n (s)	$\bar{t} = \frac{\Sigma t_n}{n}$ (s)	$(t_n - \bar{t})^2$ (s^2)	$\Delta t = \sqrt{\frac{\sum (t_n - \bar{t})^2}{n(n-1)}}$ (s)
1ª	5,23		$(5,23 - 5,29)^2 = 3,6 \times 10^{-3}$	
2ª	5,30		$(5,30 - 5,29)^2 = 0,1 \times 10^{-3}$	
3ª	5,41		$(5,41 - 5,29)^2 = 14,4 \times 10^{-3}$	
4ª	5,27	5,29	$(5,27 - 5,29)^2 = 0,4 \times 10^{-3}$	0,034
5ª	5,43		$(5,43 - 5,29)^2 = 19,6 \times 10^{-3}$	
6ª	5,19		$(5,19 - 5,29)^2 = 10,0 \times 10^{-3}$	
7ª	5,25		$(5,25 - 5,29)^2 = 1,6 \times 10^{-3}$	
	$\sum t_n = 37,08$ s		$\sum (t_n - \bar{t})^2 = 0,0497$ s^2	

Por tanto, el tiempo es:

$$t = 5,29 \pm 0,03 \text{ s}$$

1.6.4. Incertidumbre de medidas indirectas

Sea una magnitud, V, que es función de las magnitudes independientes x, y y z. La incertidumbre ΔV puede obtenerse de los siguientes modos:

FUNCIÓN	**A** POR PROMEDIO SIMPLE DE ERRORES $\Delta V = \left\|\frac{\partial V}{\partial x}\right\|\Delta x + \left\|\frac{\partial V}{\partial y}\right\|\Delta y + \left\|\frac{\partial V}{\partial z}\right\|\Delta z$ (1)	**B** POR DESVIACIÓN ESTÁNDAR $\Delta V = \sqrt{\left(\frac{\partial V}{\partial x}\Delta x\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial y}\Delta y\right)^2 + \left(\frac{\partial V}{\partial z}\Delta z\right)^2}$ (2)
	Aplicable cuando el error NO procede de errores aleatorios, es decir, se trata de un error instrumental	Cuando los errores de cada variable SÍ son aleatorios
	Cuando se desconoce si los errores son aleatorios o no, se optará por el método más conservador, es decir el **A**	
$V = x + y$ $V = x - y$	$\Delta V = \lvert\Delta x\rvert + \lvert\Delta y\rvert$	$\Delta V = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$
$V = C\frac{x \cdot y^a}{z^b}$ C, a y b son constantes	$\Delta V = V\left(\frac{\lvert\Delta x\rvert}{x} + a\frac{\lvert\Delta y\rvert}{y} + b\frac{\lvert\Delta z\rvert}{z}\right)$	$\Delta V = V\sqrt{\left(\frac{\Delta x}{x}\right)^2 + \left(a\frac{\Delta y}{y}\right)^2 + \left(b\frac{\Delta z}{z}\right)^2}$
Otras funciones que no tengan la estructura de las anteriores	Se resuelve aplicando la expresión general	Se resuelve aplicando la expresión general

EJEMPLO 1

Se tiene una pequeña regla de 15 cm, con divisiones de milímetro, con la que se quiere medir el ancho de una hoja de papel cuya longitud es superior a la de la regla, por lo que se realiza de dos veces.
Los resultados son $L_1 =$ 150 mm y $L_2 =$ 60 mm. Obtener el valor del ancho de la hoja de papel y su incertidumbre.

* * *

Como la regla es un instrumento analógico se pueden tomar:

$$L_1 \pm \Delta L_1 = (150{,}0 \pm 0{,}5) \text{ mm}$$
$$L_2 \pm \Delta L_2 = (60{,}0 \pm 0{,}5) \text{ mm}$$
$$L = L_1 + L_2 = 150{,}0 + 60{,}0 = 210{,}0 \text{ mm}$$

Mediante el método A:

$$\Delta L = 0{,}5 + 0{,}5 = 1{,}0 \text{ mm} \qquad \text{Por lo tanto:} \quad \boxed{L \pm \Delta L = (210 \pm 1) \text{ mm}}$$

EJEMPLO 2

Se tiene un paquete de 500 folios y una regla con divisiones de milímetro.

Determinar el espesor de un folio y su incertidumbre.

* * *

Si se designa por l el espesor de un folio y por L el espesor de 500 folios, se tiene que:

$$l = \frac{L}{500}$$

Se abre el paquete y se mide el espesor del mismo, que es $L \pm \Delta L = (55{,}0 \pm 0{,}5)$ mm. Por tanto:

$$l = \frac{55{,}0}{500} = 0{,}110 \text{ mm}$$

Como el espesor del folio depende de una sola variable, L, la incertidumbre, Δl, es:

$$\Delta l = l \frac{|\Delta L|}{L}$$
$$\Delta l = 0{,}110 \times \frac{0{,}5}{55} = 0{,}001 \text{ mm}$$

Por lo tanto:

$$\boxed{l \pm \Delta l = (0{,}110 \pm 0{,}001) \text{ mm}}$$

EJEMPLO 3

Un cuerpo de masa (5,32 ± 0,01) kg se desplaza con velocidad de (19,24 ± 0,02) m·s^{-1}. Hallar su energía cinética y la incertidumbre de la misma, sabiendo que los errores de ambas magnitudes son aleatorios y proceden de haber tomado varias medidas de cada magnitud.

* * *

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

$$K = \frac{1}{2} 5{,}32 \times 19{,}24^2 = 984{,}67 \text{ J}$$

Por aplicación del método B, se tiene:

$$\Delta K = K \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(2\frac{\Delta v}{v}\right)^2}$$

$$\Delta K = 984{,}67 \sqrt{\left(\frac{0{,}01}{5{,}32}\right)^2 + \left(2\frac{0{,}02}{19{,}24}\right)^2} = 2{,}76 \text{ J}$$

Por lo tanto : $\boxed{K \pm \Delta K = (985 \pm 3) \text{ J}}$

EJEMPLO 4

Si un haz de luz polarizada en una determinada dirección, con intensidad I_1 incide en un polarizador cuyo eje de transmisión está girado un ángulo θ respecto al anterior haz, la intensidad I_2 del rayo emergente es:

$$I_2 = I_1 \cos^2 \theta \qquad \text{(Ley de Malus)}$$

Si en estas condiciones, la intensidad del haz incidente es $I_1 \pm \Delta I_1 = (2{,}50 \pm 0{,}01)$, en unidades arbitrarias, y $\theta \pm \Delta \theta = (53 \pm 1)$ º, obtener el valor de I_2, junto con su incertidumbre, sabiendo que los errores de las dos magnitudes son aleatorios.

* * *

$I_2 = I_1 \cos^2 \theta$

$I_2 = 2{,}50 \times \cos^2 53 = 0{,}905$ en unidades arbitrarias

Para obtener la incertidumbre, se aplica el método B. Como la ecuación de la Ley de Malus no se corresponde con ninguna de las desarrolladas en el cuadro mostrado al inicio del apartado 1.6.4., se opera directamente con la expresión general.

$$\Delta I_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial I_2}{\partial I_1}\Delta I_1\right)^2 + \left(\frac{\partial I_2}{\partial \theta}\Delta\theta\right)^2} \qquad (1)$$

Se tiene que:

$I_1 = 2{,}50$

$\Delta I_1 = 0{,}01$

$\theta = 53$ º

$\Delta \theta = 1$ º $= \pi/180$ radianes

Se obtienen las derivadas parciales:

$$\frac{\partial I_2}{\partial I_1} = \cos^2 \theta = \cos^2 53 = 0{,}3622$$

$$\frac{\partial I_2}{\partial \theta} = -2 I_1 \sin\theta \cos\theta = -2 \times 2{,}50 \times \sin 53 \times \cos 53 = -2{,}4032$$

Sustituyendo las derivadas parciales en la expresión (1), se tiene:

$$\Delta I_2 = \sqrt{(0{,}3622 \times 0{,}01)^2 + \left(-2{,}4032 \times \frac{\pi}{180}\right)^2} = 0{,}038$$

Por lo tanto:

$$I_2 \pm \Delta I_2 = (0{,}91 \pm 0{,}04), \text{ en unidades arbitrarias}$$

1.6.5. Solución de urgencia para cálculo de incertidumbres

Si quiere obtenerse la incertidumbre de una función V, cuya estructura parece compleja, o bien, hemos olvidado las fórmulas generales, basta con obtener los valores máximo y mínimo de V, con lo que resulta:

$$\Delta V = \frac{V_{máxima} - V_{mínima}}{2}$$

EJEMPLO
Obtener la incertidumbre de I_2 del anterior ejemplo.

* * *

Como $I_2 = I_1 \cos^2 \theta$, y recordando que:

$I_1 = 2{,}50$; $\Delta I_1 = 0{,}01$
$\theta = 53^\circ$; $\Delta \theta = 1^\circ$
$I_2 = 0{,}91$

Se tiene:

$$I_{2\,\text{máxima}} = 2{,}51 \times \cos^2 52^\circ = 0{,}9514$$
$$I_{2\,\text{mínima}} = 2{,}49 \times \cos^2 54^\circ = 0{,}8603$$
$$\Delta I_2 = \frac{I_{2\ \text{máxima}} - I_{2\ \text{mínima}}}{2}$$
$$\Delta I_2 = \frac{0{,}9514 - 0{,}8603}{2} = 0{,}046$$

Por lo tanto:

$$I_2 \pm \Delta I_2 = (0{,}91 \pm 0{,}05), \text{ en unidades arbitrarias}$$

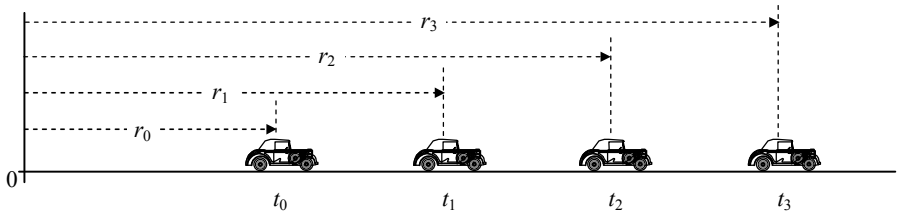
2 Gráficas y ecuaciones

2.1. Representaciones gráficas

Las medidas tomadas de las variables que intervienen en un fenómeno deben ser interpretadas. Una buena forma de hacerlo es a través de representaciones gráficas.

A modo de ejemplo, se va a considerar el experimento realizado con un objeto que se desplaza en línea recta y recorre espacios iguales en tiempos iguales, de modo que su velocidad es constante. Este tipo de movimiento se conoce como *movimiento rectilíneo uniforme*.

Supondremos que, al iniciar nuestro experimento (instante $t_0 = 0$), el cuerpo se encuentra en una posición r_0, respecto a un punto de referencia 0. A medida que va transcurriendo el tiempo (instantes t_1, t_2, t_3…), nos ocupamos de anotar las respectivas posiciones, r_1, r_2, r_3…



Se explicará la forma de estudiar este problema cinemático utilizando una *representación gráfica*.

Una representación gráfica es una forma visual de poner de manifiesto una relación matemática. En el campo de las ciencias experimentales, la gráfica permite analizar el comportamiento de un fenómeno y extraer información; por ejemplo, obtener parámetros de ese fenómeno. Por lo tanto, cuando en una pequeña o gran investigación es necesario usar una representación gráfica, hay que tener claro que esta nunca es un adorno para "amenizar" la presentación del estudio, sino una fuente de información. En consecuencia, debe realizarse de forma cuidadosa.

2.2. Elementos de las gráficas

A. Las dos variables que intervienen se denominan, *independiente* (a la que se le asignan valores) y *dependiente*. En nuestro ejemplo:

Tiempo: variable independiente
Posición: variable dependiente

B. Se construye una tabla con los valores de ambas variables. En nuestro caso, se anotarían las posiciones que ocupa el móvil en cada tiempo. Hay que advertir que, aunque pueden adoptarse intervalos de tiempo iguales, en general, no es necesario que esto sea así. En la tabla de valores han de estar claramente identificadas las magnitudes y las unidades en que se expresan.

Tiempo, t / s						
Posición, r / m						

C. Los datos recogidos en la tabla se van a trasladar a una representación gráfica. Con frecuencia, hay que aplicar alguna función matemática a alguna de las magnitudes recogidas para representar los resultados obtenidos. La representación gráfica ha de tener ciertas características. Algunas son estas:

C.1. Aunque existen diferentes tipos de papel para representaciones gráficas, como el papel logarítmico, aquí nos limitaremos exclusivamente al uso del papel milimetrado regular.

C.2. Como se pretende que la gráfica sea una fuente de información, es necesario que sea lo más grande posible.

C.3. La *variable independiente* se sitúa en el *eje de abscisas* (eje horizontal) y la *dependiente* en el *eje de ordenadas* (eje vertical).

C.4. Los dos ejes han de tener una extensión lo más parecida posible, dentro de las características de la hoja de papel milimetrado en la que se realiza.

C.5. El origen de cada escala no tiene por qué empezar necesariamente en cero.

C.6. En cada eje se realizan marcas regulares de división y se ponen números de identificación. Conviene no atiborrar un eje con números, sino poner los imprescindibles para facilitar la localización de cualquier dato. Se indica también la magnitud y la unidad, por ejemplo: t / s, o bien, t (s). Las magnitudes se escriben en caracteres romanos rectos y las unidades en cursiva, aunque esta diferencia no siempre se percibe con claridad en la escritura manual.

C.7. Se marcan los puntos correspondientes a cada par de valores. De este modo se obtiene una *nube de puntos*, que suele presentar una cierta dispersión debido a los errores experimentales.

C.8. Los puntos tienden a concentrarse en torno a una cierta línea que es la *línea de ajuste*, que puede ser recta o curva. Debido al uso que daremos a las representaciones gráficas (en general, las utilizaremos como vías para obtener parámetros), lo habitual es que trabajemos con representaciones gráficas rectas.

C.9. El trazado de la línea de ajuste puede hacerse por *tanteo* o por *métodos analíticos*.

C.10. Normalmente se trata de determinar la *ecuación de la línea de ajuste*, que se corresponderá con la *ley del fenómeno* estudiado. En nuestro ejemplo, la nube de puntos sugiere claramente una línea recta, cuya ecuación será:

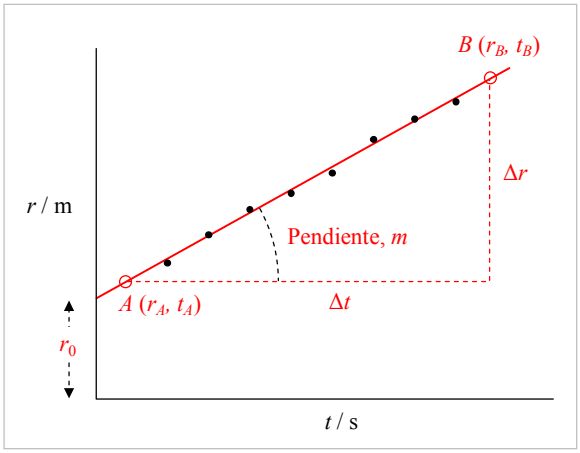
$$r = r_0 + m \cdot t \qquad (1)$$

donde r_0 es la coordenada del punto de corte de la recta con el eje de ordenadas (r_0 suele llamarse *ordenada en el origen*) y m es la pendiente.

Por otra parte, se sabe que la ecuación de la posición en un movimiento rectilíneo uniforme es:

$$r = r_0 + v \cdot t \qquad (2)$$

De la comparación de las ecuaciones (1) y (2) se deduce que la pendiente de la recta es precisamente el valor de la velocidad del móvil.



Para obtener el valor de la velocidad a partir de la representación gráfica, se toman en primer lugar dos puntos de la gráfica, con la condición de que estén suficientemente alejados. En nuestro caso, son los puntos denominados *A* y *B*. Es importante señalar que han de ser puntos de la línea trazada, y EN NINGÚN CASO han de utilizarse puntos experimentales.

Como la velocidad se corresponde con la pendiente de la recta, que a su vez es la tangente del ángulo que forma la recta trazada con la horizontal, se tiene:

$$\text{Pendiente} = \text{velocidad}, v = \frac{\Delta r}{\Delta t} = \frac{r_B - r_A}{t_B - t_A}\,\frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Conviene tener presente que si la ecuación de la ley física carece de término constante, la recta de ajuste ha de pasar, necesariamente, por el punto (0, 0).

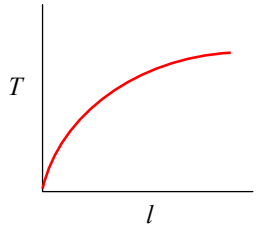
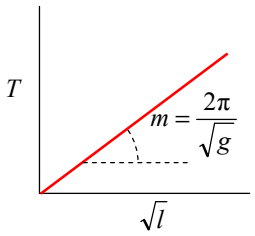
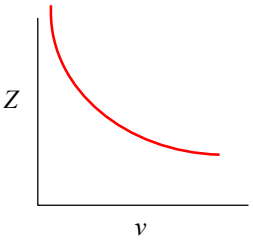
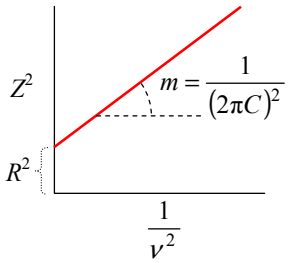
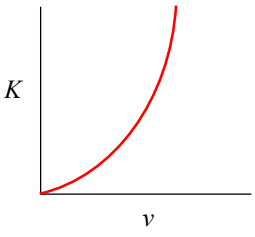
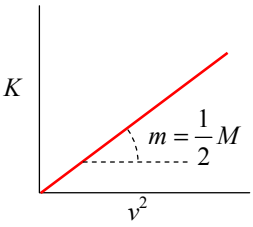
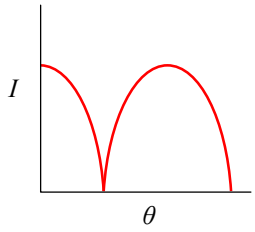
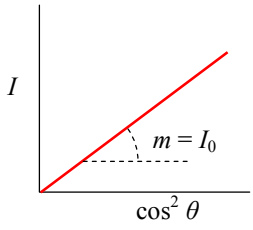
Respecto a la determinación de las incertidumbres de los parámetros de ajuste de las rectas (pendiente y punto de corte), ver en el capítulo *3. Resolución de problemas experimentales*, las secciones *3.1.2.* y *3.2.2.*

2.3. Linealización de ecuaciones

Las ecuaciones que describen fenómenos físicos no siempre son funciones lineales, por lo que la representación gráfica en esos casos no es una línea recta. Cuando ocurre esto es difícil determinar la relación entre las dos variables implicadas, pero existen algunas técnicas para convertir una gráfica no lineal en otra, lineal.

2.3.1. Linealización por cambio de variable

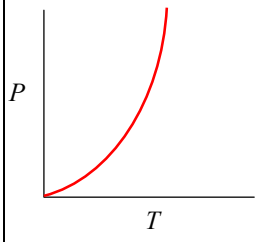
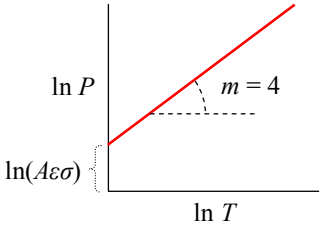
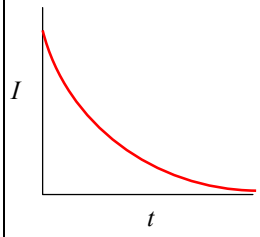
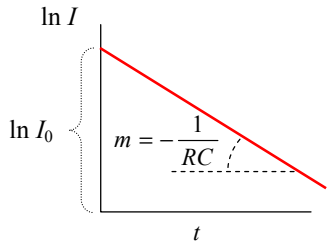
EJEMPLOS

ANTES DEL CAMBIO		DESPUÉS DEL CAMBIO	
Péndulo simple $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ T: período l: longitud del péndulo g: aceleración de la gravedad		Transformación $T = \frac{2\pi}{\sqrt{g}}\sqrt{l}$ $y = m \cdot x + b$	
Impedancia de un circuito RC $Z = \sqrt{R^2 + \left(-\frac{1}{2\pi C\nu}\right)^2}$ Z: impedancia R: resistencia C: capacidad ν: frecuencia de la corriente alterna		Transformación $Z^2 = R^2 + \frac{1}{(2\pi C)^2}\frac{1}{\nu^2}$ $y = b + m \cdot x$	
Energía cinética $K = \frac{1}{2}M\nu^2$ K: energía cinética M: masa ν: velocidad		Transformación $K = \frac{1}{2}M\nu^2$ $y = m \cdot x + b$	
Ley de Malus $I = I_0 \cos^2\theta$ I: intensida de luz incidente I_0: intensidad de luz transmitida θ: ángulo del analizador		Transformación $I = I_0 \cos^2\theta$ $y = m \cdot x + b$	

2.3.2. Linealización logarítmica

Se aplica en relaciones de tipo potencial y exponencial.

EJEMPLOS

<table>
<tr><th colspan="2">ANTES DEL CAMBIO</th><th colspan="2">DESPUÉS DEL CAMBIO</th></tr>
<tr>
<td>Ley de Stefan-Boltzmann
$P = A\varepsilon\sigma T^4$
P: potencia radiada
A: área de la superficie emisora
ε: emisividad
σ: constante de Stefan-Bolzmann
T: temperatura</td>
<td> 
</td>
<td>Transformación
$\ln P = \ln(A\varepsilon\sigma) + 4\ln T$
$y = b + m \cdot x$</td>
<td> 
</td>
</tr>
<tr>
<td>Carga de un condensador a través de una resistencia
$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}}$
I: intensidad tras un tiempo, t
I_0: intensidad inicial
R: resistencia
C: capacidad</td>
<td> 
</td>
<td>Transformación
$\ln I = \ln I_0 - \frac{1}{RC}t$
$\ln I = \ln I_0 + \left(-\frac{1}{RC}\right)t$
$y = b + m \cdot x$</td>
<td> 
</td>
</tr>
</table>

3 Resolución de problemas experimentales

3.1. Obtención del valor de la componente horizontal del campo magnético terrestre

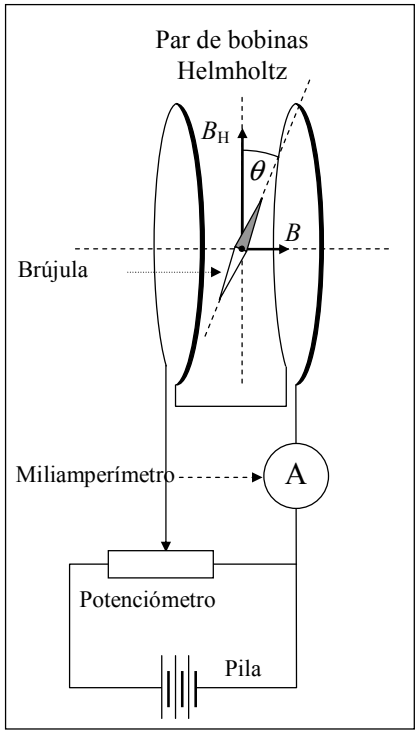
3.1.1. Planteamiento del problema

La Tierra se comporta como un gigantesco imán capaz de crear en cualquier punto del planeta un campo magnético, B_T . El vector de este campo puede descomponerse en dos componentes, una vertical, B_v y otra horizontal, B_H. Una brújula señala siempre la dirección de esa componente horizontal, pero no proporciona el valor del módulo del vector.

La bobinas Helmholtz son un par de bobinas iguales, situadas en planos paralelos, separadas una distancia igual al radio de las mismas, r, y recorridas por corrientes iguales que circulan en el mismo sentido. En el centro de las bobinas el campo magnético es bastante uniforme y su valor, B viene dado por:

$$B = \frac{8}{5\sqrt{5}} \frac{\mu_0 N I}{r} \qquad (1)$$

donde μ_0 es la permeabilidad magnética del vacío, N es el número de espiras de cada bobina e I es la intensidad eléctrica.



Se sitúa una brújula en el centro de las bobinas. Cuando no hay corriente eléctrica en estas, el campo magnético producido por las bobinas es cero y el único campo que actúa sobre la brújula es el de la componente horizontal B_H. Antes de iniciar la toma de datos, el conjunto de las bobinas y la brújula se orienta hasta que el circulo graduado de la brújula marque un ángulo $\theta = 0$.

Al circular corriente por las bobinas, se produce un campo magnético, B, perpendicular al campo B_H, con lo que la brújula gira un ángulo θ, tal que:

$$\tan\theta = \frac{B}{B_H} \qquad (2)$$

Durante el experimento, se va girando el mando del potenciómetro con el fin de tomar medidas de la intensidad y de los correspondientes ángulos de la brújula. Los resultados obtenidos han sido los siguientes:

	I /A	θ / º
1	0	0
2	$0{,}86 \times 10^{-2}$	30
3	$1{,}00 \times 10^{-2}$	35
4	$1{,}21 \times 10^{-2}$	40
5	$1{,}45 \times 10^{-2}$	45
6	$1{,}71 \times 10^{-2}$	50
7	$2{,}08 \times 10^{-2}$	55
8	$2{,}55 \times 10^{-2}$	60
9	$3{,}17 \times 10^{-2}$	65
10	$4{,}13 \times 10^{-2}$	70
11	$5{,}53 \times 10^{-2}$	75
12	$8{,}20 \times 10^{-2}$	80

El procedimiento que se propone consiste primeramente en combinar las ecuaciones (1) y (2) para obtener una dependencia de I con una función de θ, de modo que al representar I en ordenadas respecto a esa función de θ en abscisas se obtenga una línea recta. A partir de la ecuación de la línea recta tendrá que obtenerse finalmente el valor de B_H, junto con el de su incertidumbre. Para ello se cuenta con los siguientes datos:

$r = 9{,}50 \pm 0{,}05$ cm; $N = 185$ espiras; $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ T·m·A^{-1}

NOTA: No se tendrán en cuenta las incertidumbres en las medidas de la intensidad y del ángulo.

3.1.2. Resolución

Sustituyendo (1) en (2) y despejando la intensidad, resulta:

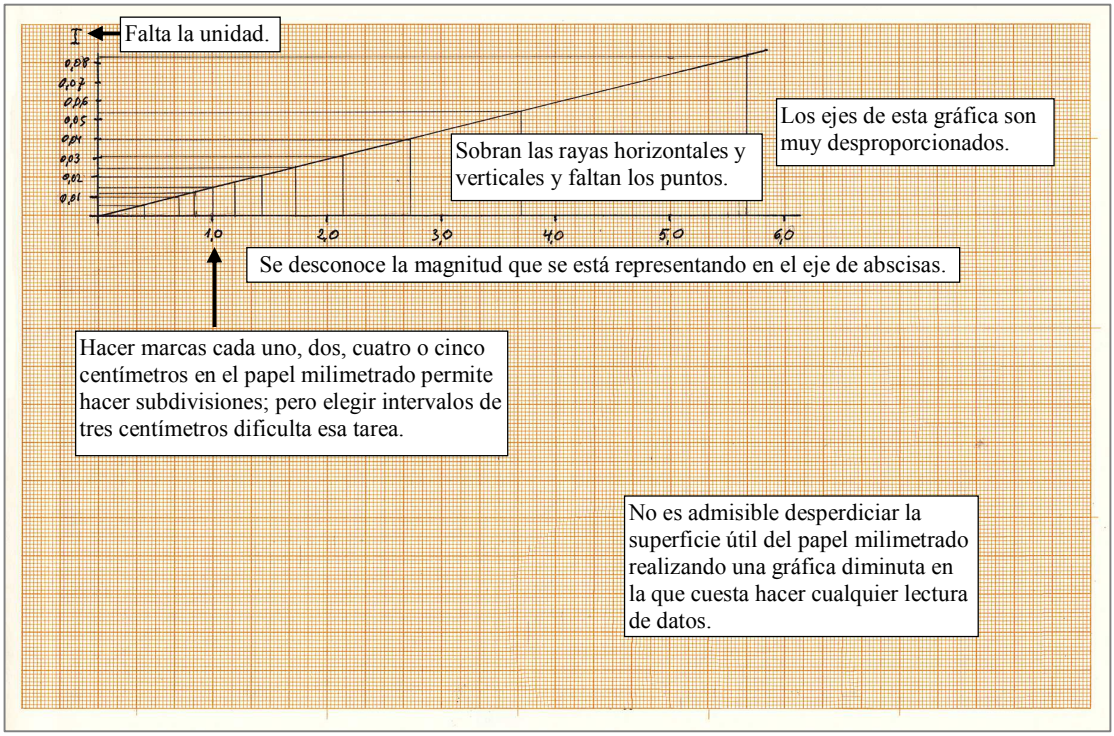
$$I = \frac{5\sqrt{5} \cdot r \cdot B_H}{8\mu_0 N} \tan\theta \qquad (3)$$

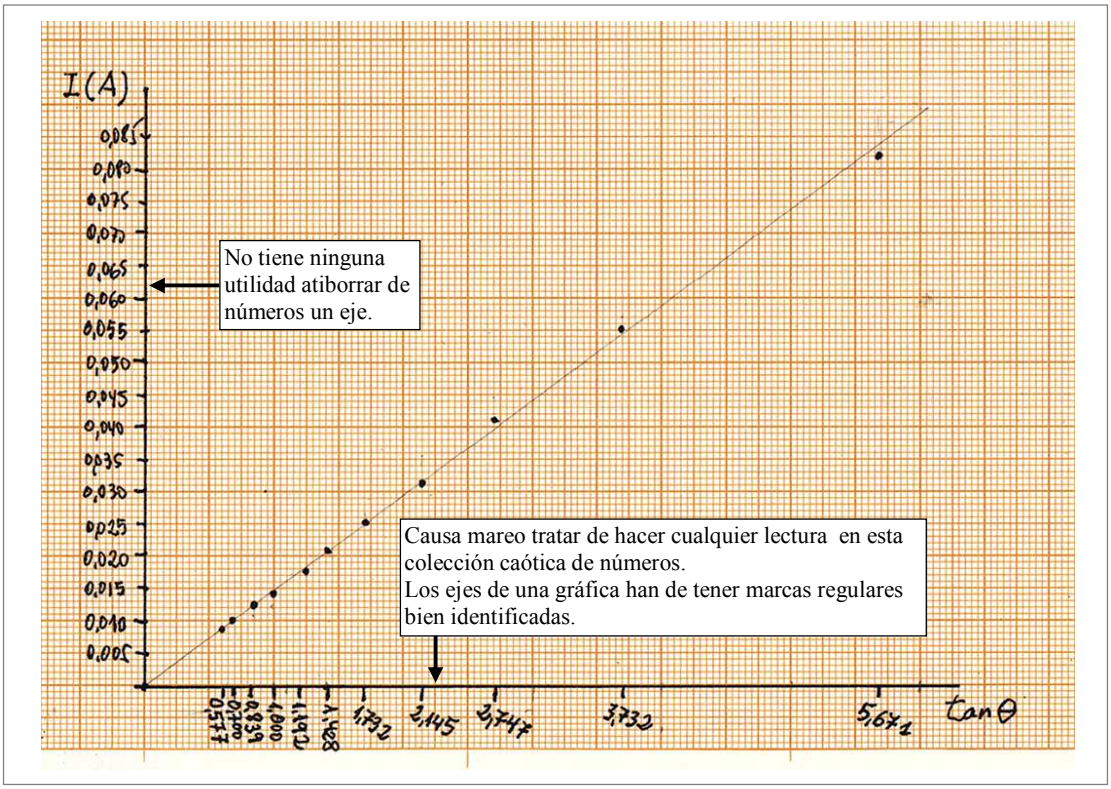
$$y = m \cdot x$$

Por lo tanto, la función de θ frente a la que debe representarse la intensidad para obtener una línea recta es la tangente. Para facilitar la representación se añade a la tabla de datos una nueva columna con tan θ.

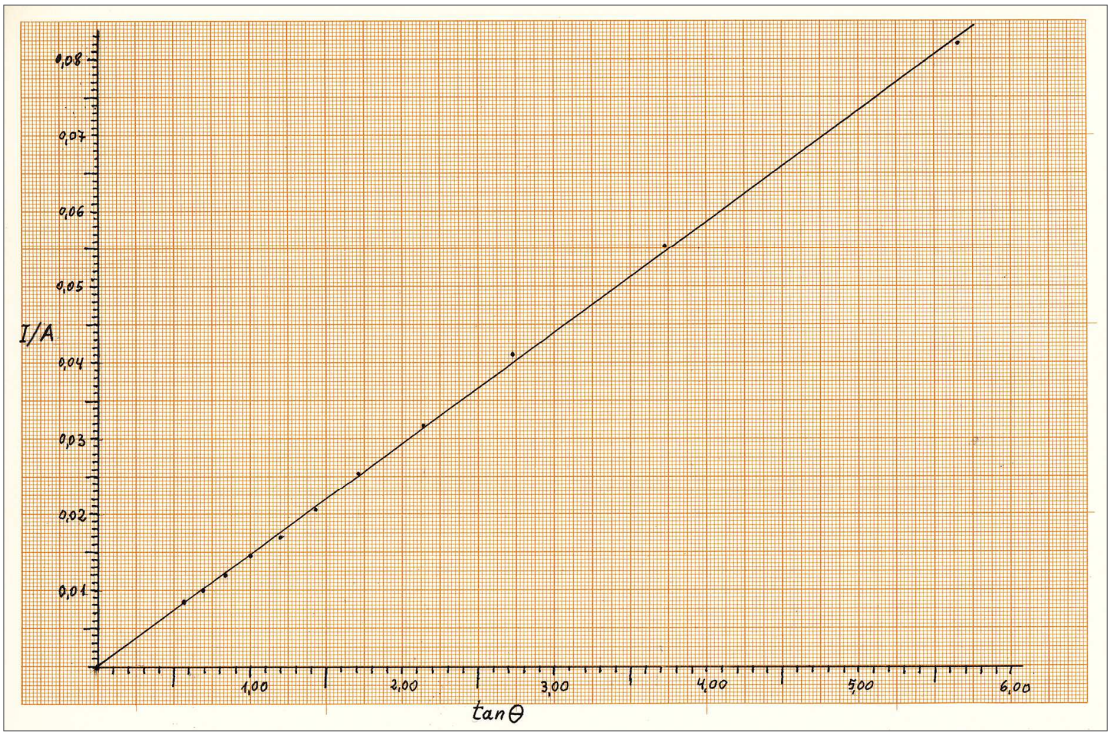
	I / A	θ / º	tan θ
1	0	0	0,000
2	$0{,}86 \times 10^{-2}$	30	0,577
3	$1{,}00 \times 10^{-2}$	35	0,700
4	$1{,}21 \times 10^{-2}$	40	0,839
5	$1{,}45 \times 10^{-2}$	45	1,000
6	$1{,}71 \times 10^{-2}$	50	1,192
7	$2{,}08 \times 10^{-2}$	55	1,428
8	$2{,}55 \times 10^{-2}$	60	1,732
9	$3{,}17 \times 10^{-2}$	65	2,145
10	$4{,}13 \times 10^{-2}$	70	2,747
11	$5{,}53 \times 10^{-2}$	75	3,732
12	$8{,}20 \times 10^{-2}$	80	5,571

A continuación se muestras dos ejemplos de cómo NO DEBE HACERSE esta (y ninguna) representación gráfica:

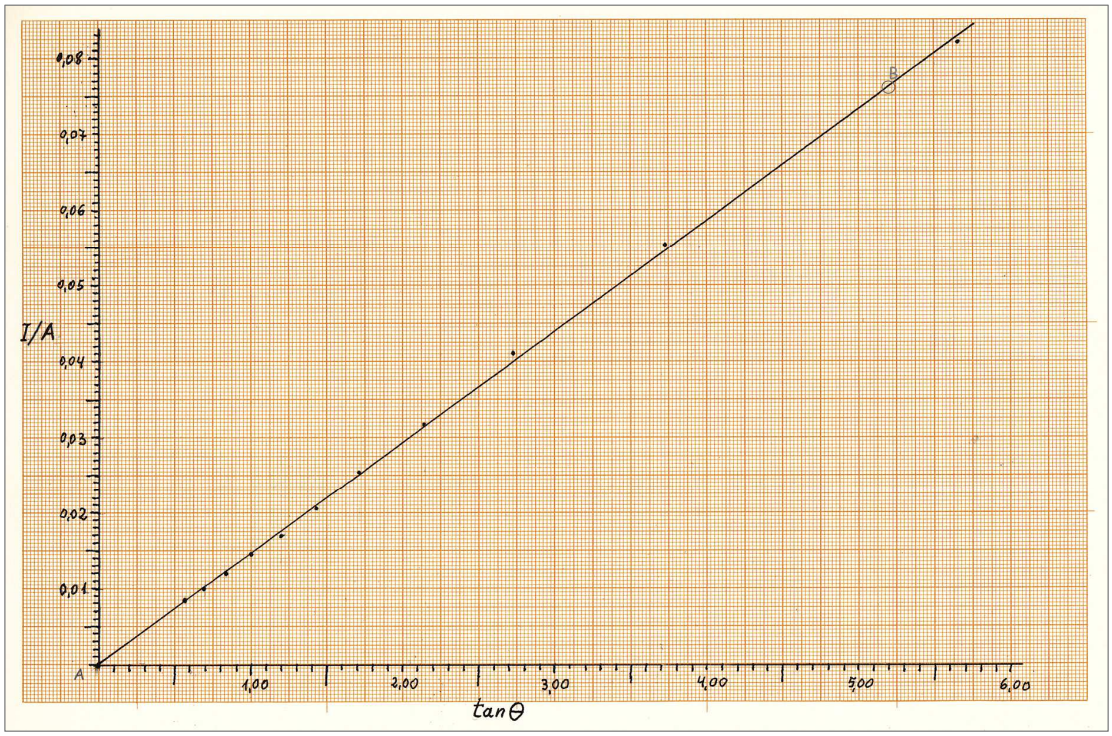




Para realizar correctamente una gráfica, se distribuye adecuadamente el espacio útil del papel milimetrado, se dibujan los ejes con sus marcas, se representan los puntos y se traza la recta que mejor se adapta a la nube de puntos. En este caso, la gráfica ha de pasar por el origen, ya que la ecuación (3) carece de término independiente.



Se eligen dos puntos de la línea, *A* y *B*, que estén suficientemente alejados y se toman sus coordenadas. A partir de ellos se halla la pendiente de la recta.



Los puntos elegidos son: A (0,00; 0,000) y B (5,20; 0,076)

$$\text{pendiente, } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0{,}076 - 0{,}000}{5{,}52 - 0{,}00}\ \text{A}$$

$$m = 0{,}0146\ \text{A}$$

Como se muestra en la ecuación (3) el valor de la pendiente es:

$$m = \frac{5\sqrt{5} \cdot r \cdot B_{\text{H}}}{8\mu_0 N}$$

Por lo tanto, el valor de la componente horizontal del campo magnético terreste es:

$$B_{\text{H}} = \frac{8\mu_0 \cdot N \cdot m}{5\sqrt{5} \cdot r}$$

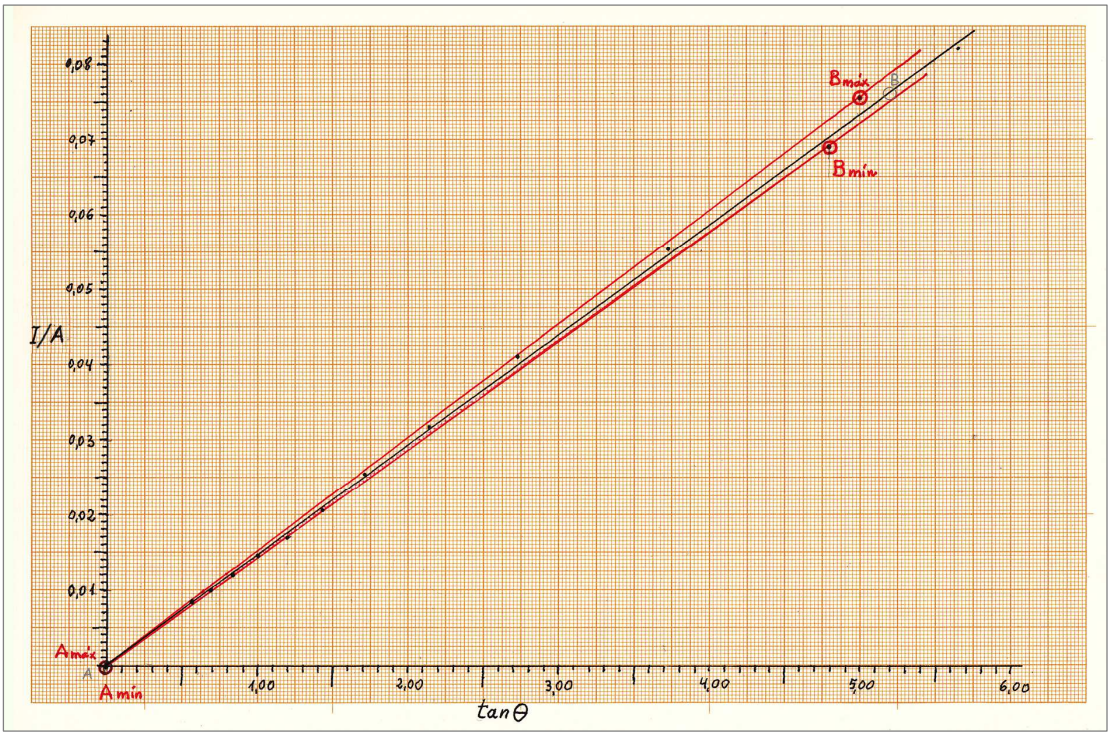
$$B_{\text{H}} = \frac{8 \times 4\pi \times 10^{-7} \times 185 \times 0{,}0146}{5\sqrt{5} \times 9{,}50 \times 10^{-2}}\ \frac{\text{T} \cdot \text{m} \cdot \text{A}^{-1} \cdot \text{A}}{\text{m}}$$

$$B_{\text{H}} = 2{,}56 \times 10^{-5}\ \text{T}$$

Para hallar la incertidumbre de este valor es necesario conocer la incertidumbre de la pendiente, Δm.

Un método consiste en trazar las líneas de máxima y mínima pendiente, de modo que entre ambas se encuentren los valores experimentales. Teniendo en cuenta que en este experimento el ángulo de la brújula es cero cuando no circula intensidad por la bobina, se hará que esas rectas basculen sobre el origen.

Para hallar las pendientes de esas rectas, se buscan de nuevo puntos suficientemente alejados en cada una de las rectas.



.

$$m_{máx} = \frac{y_{B\,\text{máx}} - y_{A\,\text{máx}}}{x_{B\,\text{máx}} - x_{A\,\text{máx}}} = \frac{0{,}076 - 0{,}000}{5{,}00 - 0{,}00} = 0{,}0152 \text{ A}$$

$$m_{mín} = \frac{y_{B\,\text{mín}} - y_{A\,\text{mín}}}{x_{B\,\text{mín}} - x_{A\,\text{mín}}} = \frac{0{,}069 - 0{,}000}{4{,}80 - 0{,}00} = 0{,}0144 \text{ A}$$

$$\Delta m = \frac{m_{\text{máx}} - m_{\text{mín}}}{2} = \frac{0{,}0152 - 0{,}0144}{2} = 0{,}0004 \text{ A}$$

Por lo tanto: $m \pm \Delta m = (0{,}0146 \pm 0{,}0004)$ A

Finalmente, se halla la incertidumbre de $B_{\text{H,}}$ teniendo en cuenta que μ_0 y N se consideran libres de error.

$$B_{\text{H}} = \frac{8\mu_0 \cdot N \cdot m}{5\sqrt{5} \cdot r}$$

$$\Delta B_{\text{H}} = B_H \sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta r}{r}\right)^2}$$

$$\Delta B_{\text{H}} = 2{,}56 \times 10^{-5} \sqrt{\left(\frac{0{,}0004}{0{,}0146}\right)^2 + \left(\frac{0{,}05}{9{,}50}\right)^2}$$

$$\Delta B_{\text{H}} = 0{,}07 \times 10^{-5} \text{ T}$$

Por lo que el valor de la componente horizontal del campo magnético terrestre es:

$$\boxed{B_{\text{H}} \pm \Delta B_{\text{H}} = (2{,}56 \pm 0{,}07) \times 10^{-5} \text{ T}}$$

3.2. Estudio del proceso de carga de un condensador a través de una resistencia, y deducción de la capacidad del condensador

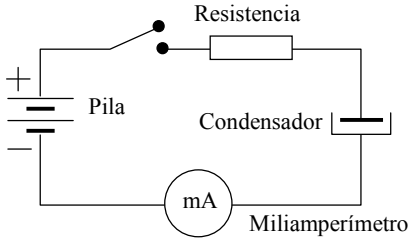
3.2.1. Planteamiento del problema

Un condensador es un dispositivo capaz de almacenar energía eléctrica. Su principal característica es la *capacidad, C*, que es el cociente entre la carga acumulada y la diferencia de potencial entre sus terminales.

En el experimento, un condensador inicialmente descargado se va a cargar mediante una pila eléctrica a través de una resistencia *R*. Tras cerrar el circuito, la corriente que circula empieza a cargar el condensador, de forma que aumenta la diferencia de potencial entre sus terminales. A medida que el condensador se va cargando, la intensidad, *I*, en el circuito va disminuyendo con el tiempo, *t*, de forma exponencial, de acuerdo con:

$$I = I_0 e^{-\frac{t}{RC}} \qquad (1)$$

donde I_0 es la corriente inicial, cuando se cierra el circuito, en $t = 0$.



El experimento se inicia con el condensador completamente descargado. Se cierra el circuito y, simultáneamente, se pone en marcha el cronómetro. Los valores de la intensidad, anotados a intervalos regulares de 10 segundos, hasta un máximo de 120 segundos, se recogen en la siguiente tabla:

t / s	*I* / mA
10	0,043 ± 0,001
20	0,039 ± 0,001
30	0,036 ± 0,001
40	0,032 ± 0,001
50	0,029 ± 0,001
60	0,027 ± 0,001
70	0,024 ± 0,001
80	0,022 ± 0,001
90	0,020 ± 0,001
100	0,018 ± 0,001
110	0,017 ± 0,001
120	0,015 ± 0,001

El procedimiento que se propone consiste en transformar la ecuación (1) para obtener una dependencia lineal entre alguna función de la intensidad, I y el tiempo t. Representación gráficamente los puntos correspondientes a esa dependencia, con la función de I en ordenadas, se quiere determinar la capacidad del condensador, C, la intensidad inicial, I_0, y las incertidumbres de ambas, ΔC y ΔI_0.

El valor de la resistencia R, medida con el multímetro, es de 98,6 kΩ.

3.2.2. Resolución

Se parte de la ecuación que describe la carga del condensador:

$$I = I_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \qquad (1)$$

Aplicando logartimos, se tiene:

$$\ln I = \ln I_0 - \frac{1}{RC} t \qquad (2)$$

o, lo que es igual:

$$\ln I = \ln I_0 + \left(-\frac{1}{RC} \right) t \qquad (3)$$

$$y = b + m \cdot x$$

Por lo tanto, deberá representarse el ln$I$ frente a t. Para ello, se añade a la tabla una columna con los valores de ln$I$.
Como I tiene una incertidumbre, ΔI, que no es despreciable, se añadirá también otra columna con la incertidumbre del logaritmo de la intensidad, $\Delta(\ln I)$.

De lo dicho en su momento para la incertidumbre en medidas indirectas, se sabe que:

$$\Delta V = \left| \frac{\partial V}{\partial x} \right| \Delta x$$

Como en nuestro caso, $V = \ln I$, y $x = I$, la incertidumbre es:

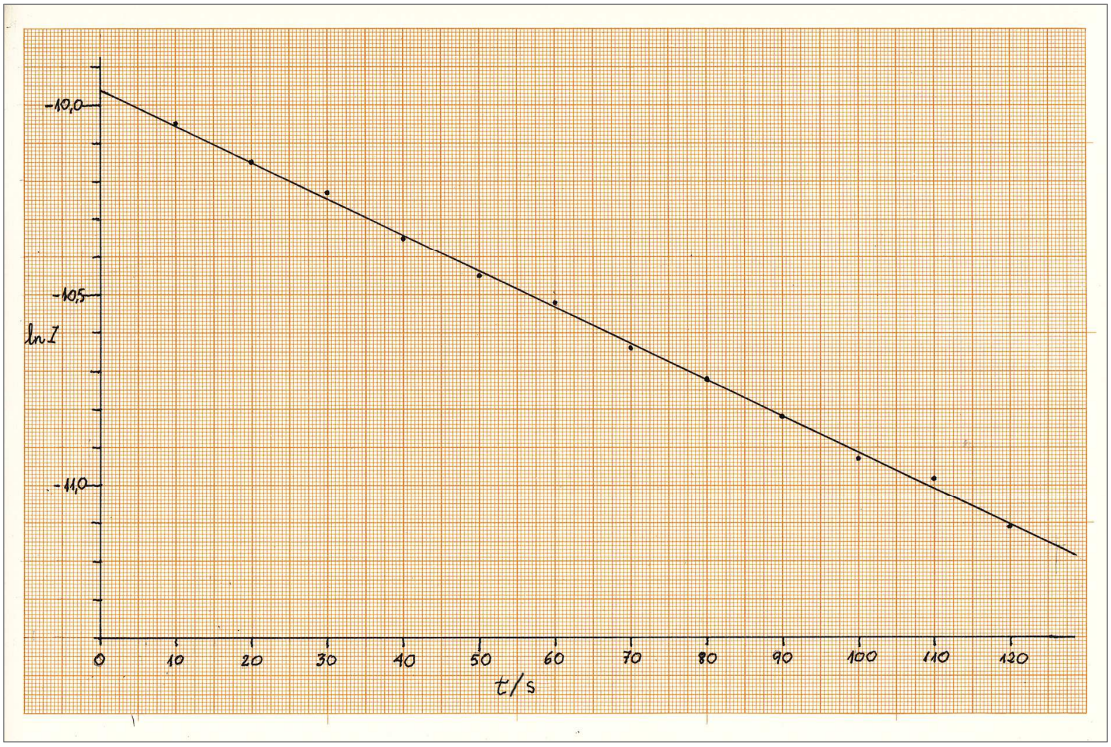
$$\Delta(\ln I) = \frac{\partial(\ln I)}{\partial I} \Delta I$$

$$\Delta(\ln I) = \frac{1}{I} \Delta I$$

La tabla queda de este modo:

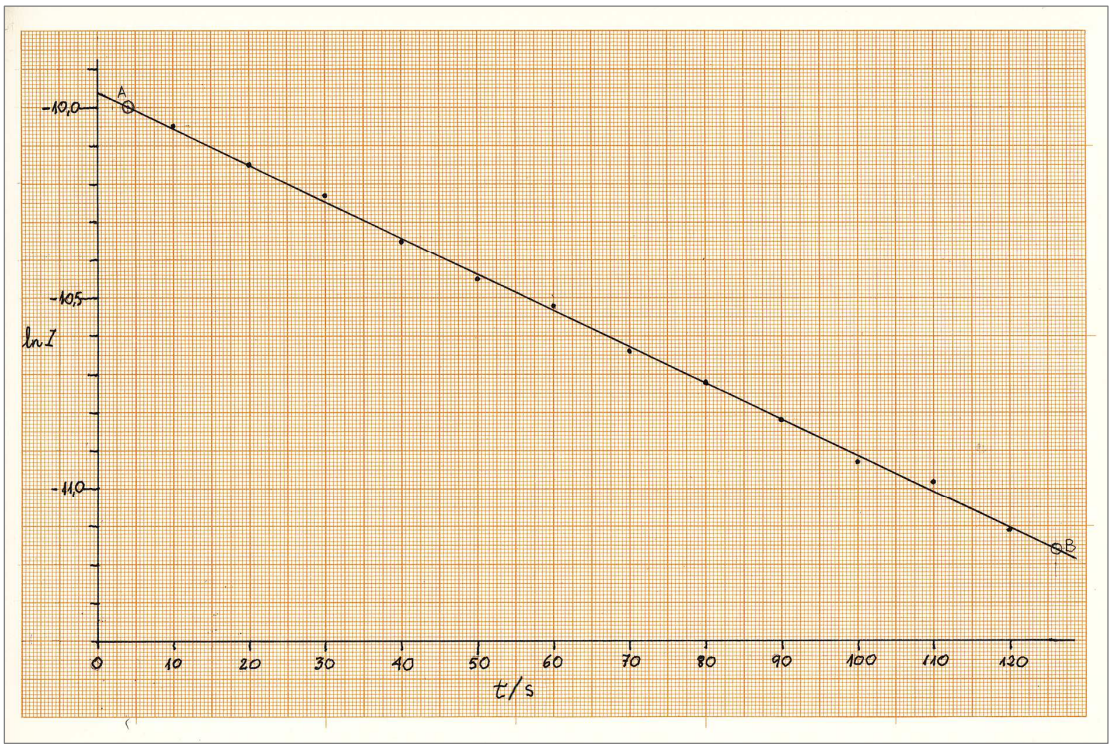
t / s	I / A	ln I	ΔI / A	$\Delta(\ln I)$
10	$4{,}3 \times 10^{-5}$	- 10,05	$0{,}1 \times 10^{-5}$	0,023
20	$3{,}9 \times 10^{-5}$	- 10,15		0,026
30	$3{,}6 \times 10^{-5}$	- 10,23		0,028
40	$3{,}2 \times 10^{-5}$	- 10,35		0,031
50	$2{,}9 \times 10^{-5}$	- 10,45		0,034
60	$2{,}7 \times 10^{-5}$	- 10,52		0,037
70	$2{,}4 \times 10^{-5}$	- 10,64		0,042
80	$2{,}2 \times 10^{-5}$	- 10,72		0,045
90	$2{,}0 \times 10^{-5}$	- 10,82		0,050
100	$1{,}8 \times 10^{-5}$	- 10,93		0,056
110	$1{,}7 \times 10^{-5}$	- 10,98		0,059
120	$1{,}5 \times 10^{-5}$	- 11,11		0,067

Se distribuye adecuadamente el espacio útil del papel milimetrado, se dibujan los ejes con sus marcas, se representan los puntos y se traza la recta que mejor se adapta a la nube de puntos.



Se eligen dos puntos de la línea, *A* y *B*, que estén suficientemente alejados y se toman sus coordenadas. A partir de ellos se halla la pendiente de la recta.

Las coordenadas de los puntos son: *A* (4,0; -10,00) y *B* (126,0; -11,16)



$$\text{pendiente, } m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-11{,}16 - (-10{,}00)}{126{,}0 - 4{,}0}\ \text{s}^{-1}$$

$$m = -9{,}508 \times 10^{-3}\ \text{s}^{-1}$$

El valor de la ordenada en el origen se lee directamente en la gráfica anterior.

$$b = -\ 9{,}96$$

Como aparece en la ecuación (3) los valores de la pendiente y de la ordenada en el origen son:

$$m = -\frac{1}{RC}$$

$$b = \ln I_0$$

Por lo tanto, el valor de la capacidad del condensador es:

$$C = -\frac{1}{mR}$$

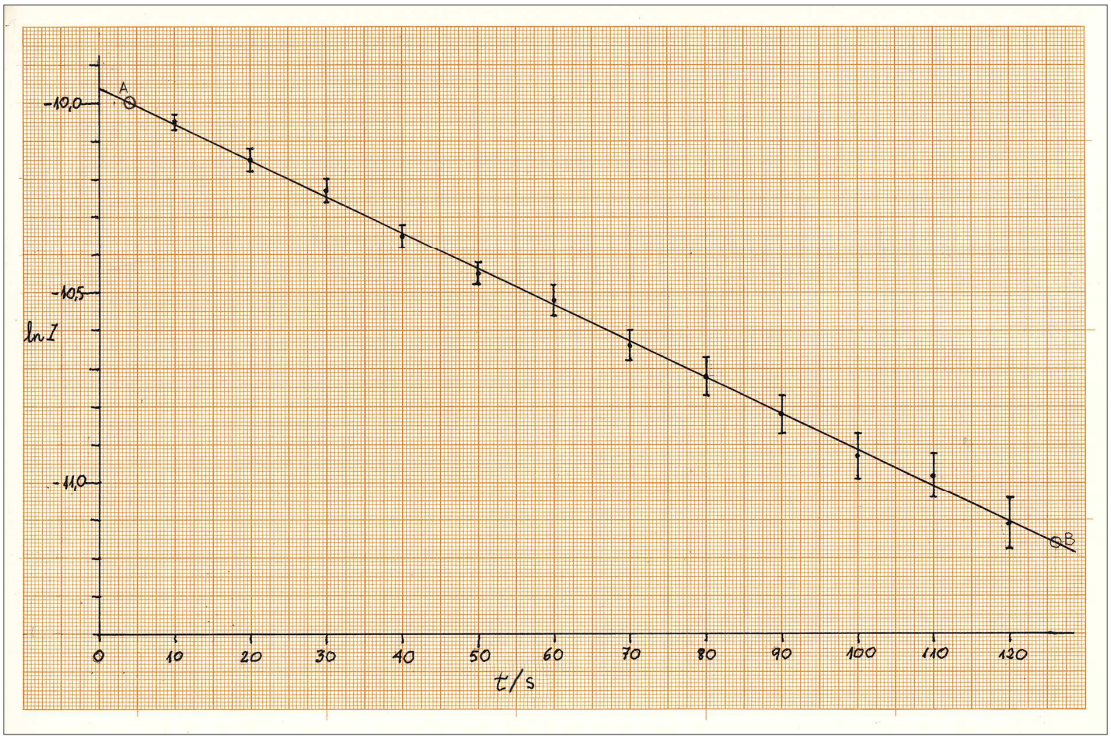
$$C = -\frac{1}{-9{,}508 \times 10^{-3} \times 98{,}6 \times 10^{3}}\ \frac{1}{\text{s}^{-1} \cdot \Omega}$$

$$C = 1{,}067 \times 10^{-3}\ \text{F}$$

Del valor de la ordenada en el origen, se tiene que $I_0 = \text{e}^{-b}$:

$$I_0 = 4{,}73 \times 10^{-5}\ \text{A}$$

Para hallar las incertidumbres de estos valores es necesario conocer la incertidumbre de la pendiente, Δm y la de la ordenada en el origen, Δb. Se comienza dibujando las barras de error correspondientes a los valores de ln I.



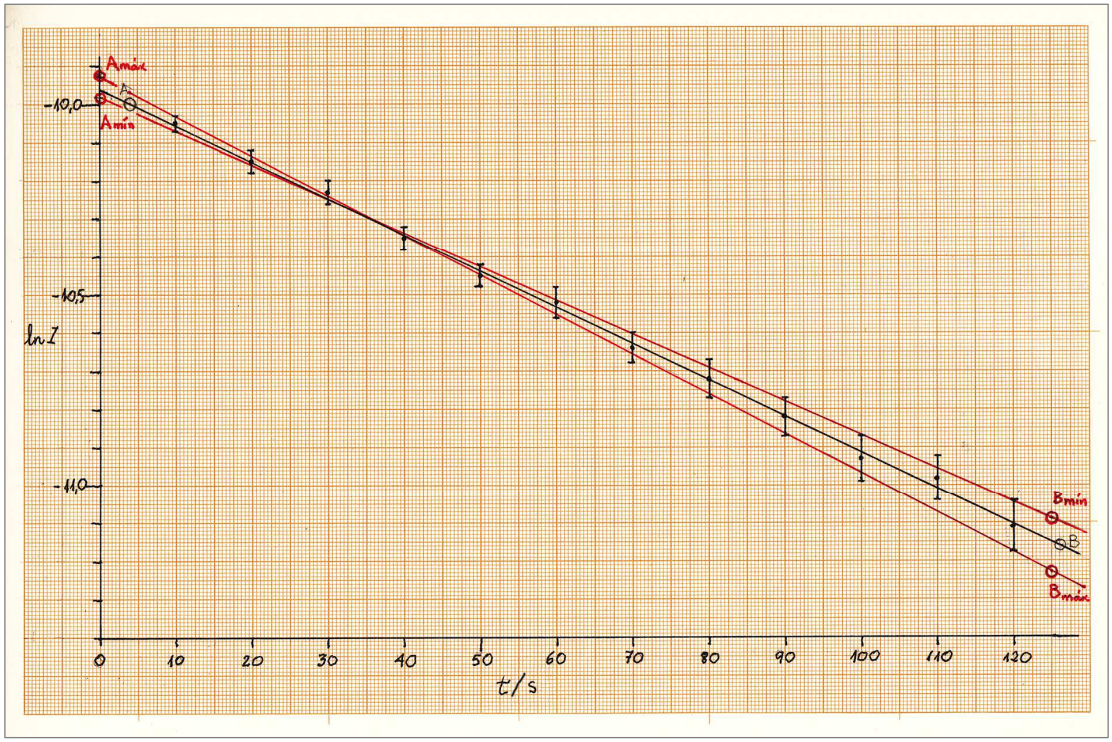
Se trazan las líneas de máxima y mínima pendiente. Para ello puede seguirse el siguiente procedimiento:

a) Se centra la atención exclusivamente en las barras de error de los puntos extremos de la gráfica.

b) La *línea de de máxima pendiente* (en valor absoluto) se dibuja uniendo el extremo superior de la barra de error del punto de la izquierda con el extremo inferior de la barra de error del punto de la derecha.

c) La *línea de mínima pendiente* (en valor absoluto) se dibuja uniendo el extremo inferior de la barra de error del punto de la izquierda con el extremo superior de la barra de error del punto de la derecha.

Una vez representadas las líneas, sus respectivas pendientes se hallan escogiendo, en cada una de ellas, dos puntos suficientemente alejados



$$m_{\text{máx}} = \frac{y_{B\,\text{máx}} - y_{A\,\text{máx}}}{x_{B\,\text{máx}} - x_{A\,\text{máx}}} = \frac{-11{,}23 - (-9{,}93)}{125{,}0 - 0{,}0} = -1{,}040 \times 10^{-2}\ \text{s}^{-1}$$

$$b_{\text{máx}} = -9{,}93$$

$$m_{\text{mín}} = \frac{y_{B\,\text{mín}} - y_{A\,\text{mín}}}{x_{B\,\text{mín}} - x_{A\,\text{mín}}} = \frac{-11{,}09 - (-9{,}98)}{125{,}0 - 0{,}0} = -8{,}880 \times 10^{-3}\ \text{s}^{-1}$$

$$b_{\text{mín}} = -9{,}98$$

$$\Delta m = \frac{m_{\text{máx}} - m_{\text{mín}}}{2} = \frac{-1{,}040 \times 10^{-2} - \left(-8{,}880 \times 10^{-3}\right)}{2} = -8{,}0 \times 10^{-4}\ \text{s}^{-1}$$

$$\Delta b = \frac{b_{\text{máx}} - b_{\text{mín}}}{2} = \frac{-9{,}93 - (-9{,}98)}{2} = 0{,}03$$

Por lo tanto:

$$m \pm \Delta m = (-9{,}5 \pm 0{,}8) \times 10^{-3}\ \text{A}$$
$$b \pm \Delta b = (-9{,}96 \pm 0{,}03)$$

Finalmente, se halla las incertidumbres de C y de I_0.

$$C = -\frac{1}{mR}$$

$$\Delta C = C\sqrt{\left(\frac{\Delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\Delta R}{R}\right)^2}$$

$$\Delta C = 1{,}067 \times 10^{-5}\sqrt{\left(\frac{0{,}8}{-9{,}5}\right)^2 + \left(\frac{0{,}1}{98{,}6}\right)^2}$$

$$\Delta C = 9 \times 10^{-5}\ \text{F}$$

$$\boxed{C \pm \Delta C = (107 \pm 9) \times 10^{-5}\ \text{F}}$$

Puede advertirse que la incertidumbre de m es mucho mayor que la incertidumbre de R, por lo que esta última podría haberse despreciado, operando con la expresión:

$$\Delta C = C\,\frac{\Delta m}{m}$$

En cuanto a la incertidumbre de I_0:

$$\Delta I_0 = \left|\frac{\partial I_0}{\partial b}\right| \Delta b$$

Como $I_0 = \mathrm{e}^{-b}$

$$\Delta I_0 = \mathrm{e}^{-b}\Delta b = I_0 \Delta b$$

$$\Delta I_0 = 4{,}73\times10^{-5}\times 0{,}03\ \mathrm{A} = 1{,}4\times10^{-6}\ \mathrm{A}$$

$$\boxed{I_0 \pm \Delta I_0 = (47{,}3 \pm 1{,}4)\times10^{-6}\ \mathrm{A}}$$