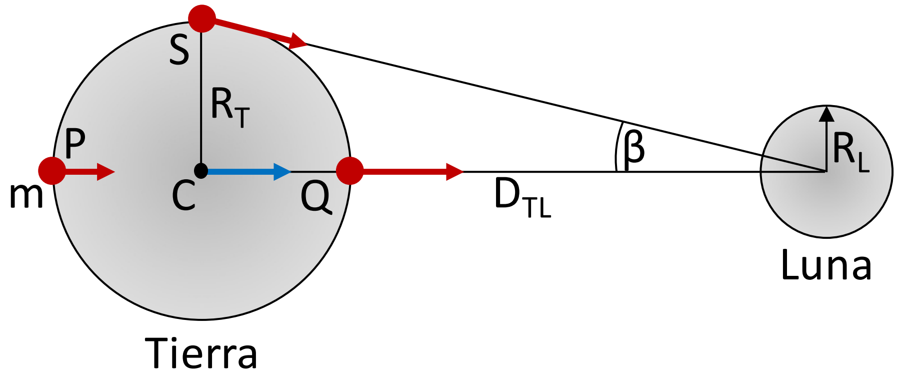
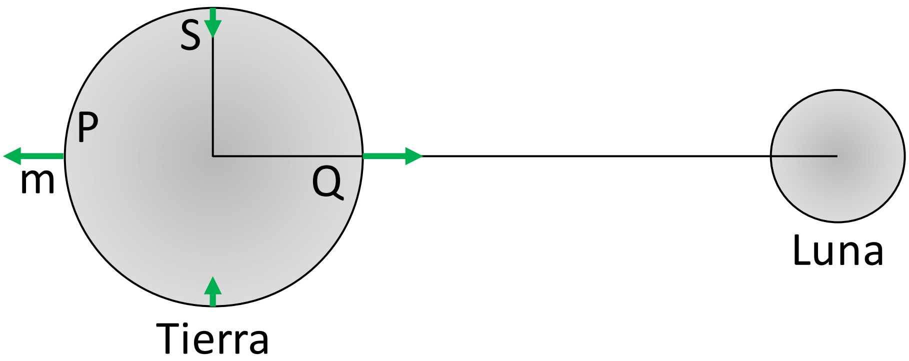
Problema 1: El origen de la fuerza de marea

a) Dibujamos en color rojo las fuerzas de atracción que ejerce la Luna sobre un objeto de masa m situado en los puntos P, Q y S, y en azul la fuerza sobre dicho objeto si estuviese situado en el centro (punto C) de la Tierra.



A continuación, se dibujan en verde las fuerzas de marea como la diferencia entre los vectores rojos y azul en los puntos P, Q y S teniendo en cuenta que el ángulo β es muy pequeño.



b) Para el objeto de masa m colocado en el centro de la Tierra la fuerza de atracción está dirigida hacia el centro de la Luna:

$$\boldsymbol{F_C} = G\frac{M_L m}{D_{TL}^2}\boldsymbol{i}$$

En los puntos P y Q la fuerza de atracción que ejerce la Luna:

$$\boldsymbol{F_P} = G\frac{M_L m}{(D_{TL}+R_T)^2}\boldsymbol{i} \qquad \boldsymbol{F_Q} = G\frac{M_L m}{(D_{TL}-R_T)^2}\boldsymbol{i}$$

Para el punto S, aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que la fuerza de atracción que ejerce la Luna:

$$\boldsymbol{F_S} = G\frac{M_L m}{D_{TL}^2 + R_T^2}(cos\ \beta\boldsymbol{i} - sen\ \beta\boldsymbol{j})$$

Por lo tanto, solamente tenemos que restar vectorialmente para obtener la fuerza de marea en los tres puntos, que denotamos con el subíndice m:

$$\boldsymbol{F_{m,P}} = \boldsymbol{F_P} - \boldsymbol{F_C} = G\frac{M_L m}{(D_{TL}+R_T)^2}\boldsymbol{i} - G\frac{M_L m}{D_{TL}^2}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{F_{m,Q}} = \boldsymbol{F_Q} - \boldsymbol{F_C} = G\frac{M_L m}{(D_{TL}-R_T)^2}\boldsymbol{i} - G\frac{M_L m}{D_{TL}^2}\boldsymbol{i}$$

$$\boldsymbol{F_{m,S}} = \boldsymbol{F_S} - \boldsymbol{F_C} = G\frac{M_L m}{D_{TL}^2+R_T^2}(\cos\beta\boldsymbol{i} - \text{sen}\,\beta\boldsymbol{j}) - G\frac{M_L m}{D_{TL}^2}\boldsymbol{i}$$

Para el punto P sacando factor común podemos escribir que:

$$\boldsymbol{F_{m,P}} = \boldsymbol{F_P} - \boldsymbol{F_C} = GM_L m\left\{\frac{D_{TL}^2 - (D_{TL}^2 + R_T^2 + 2D_{TL}R_T)}{(D_{TL}+R_T)^2 D_{TL}^2}\right\}\boldsymbol{i} = GM_L m\left\{\frac{-(R_T^2+2D_{TL}R_T)}{(D_{TL}+R_T)^2 D_{TL}^2}\right\}\boldsymbol{i}$$

en donde, si usamos la aproximación de que $D_{TL} >> R_T$, se tiene que:

$$\boldsymbol{F_{m,P}} \cong -GM_L m\frac{2R_T}{D_{TL}^3}\boldsymbol{i} \qquad \textbf{(1)}$$

De forma análoga para el punto Q tenemos que

$$\boldsymbol{F_{m,Q}} \cong GM_L m\frac{2R_T}{D_{TL}^3}\boldsymbol{i} \qquad \textbf{(2)}$$

Para el punto S, usamos que $D_{TL} >> R_T$ para determinar el coseno y el seno del ángulo β:

$$\cos(\beta) = \frac{D_{TL}}{\sqrt{D_{TL}^2+R_T^2}} \cong \frac{D_{TL}}{D_{TL}} = 1 \qquad \text{sen}(\beta) = \frac{R_T}{\sqrt{D_{TL}^2+R_T^2}} \cong \frac{R_T}{D_{TL}}$$

por lo que:

$$\boldsymbol{F_{m,S}} = \boldsymbol{F_S} - \boldsymbol{F_C} = G\frac{M_L m}{D_{TL}^2+R_T^2}\left(\boldsymbol{i} - \frac{R_T}{D_{TL}}\boldsymbol{j}\right) - G\frac{M_L m}{D_{TL}^2}\boldsymbol{i}$$

en donde si usamos de nuevo que $D_{TL} >> R_T$ se tiene que:

$$\boldsymbol{F_{m,S}} = \boldsymbol{F_S} - \boldsymbol{F_C} = -GM_L m\frac{R_T}{D_{TL}^3}\boldsymbol{j} \qquad \textbf{(3)}$$

Nos damos también cuenta de que en módulo: $F_{m,P} = F_{m,Q} = 2F_{m,S}$

c) Análogamente, para el sistema Tierra-Sol la fuerza de marea en el puno P, usando ahora que $D_{TS} >> R_T$, se tiene que:

$$\boldsymbol{F_{m,P}^{sol}} \cong -GM_S m\frac{2R_T}{D_{TS}^3}\boldsymbol{i} \qquad \textbf{(4)}$$

donde hemos usando el superíndice sol para diferenciarla de la del apartado anterior.

d) Sin más que dividir (1) entre (4) tenemos que:

$$\frac{F_{m,P}}{F_{m,P}^{sol}} = \frac{GM_L m\frac{2R_T}{D_{TL}^3}}{GM_S m\frac{2R_T}{D_{TS}^3}} = \frac{M_L}{M_S}\left(\frac{D_{TS}}{D_{TL}}\right)^3 = \frac{7.35\text{x}10^{22}}{1.98\text{x}10^{30}}\left(\frac{1.50\text{x}10^{11}}{3.84\text{x}10^{8}}\right)^3 = 2.2$$

La masa de Sol es mucho mayor que la de la Luna, pero como la distancia a la Tierra también es mayor ($D_{TS} > D_{TL}$) y va elevada al cubo se tiene que la fuerza de marea producida por el Sol es más pequeña, aproximadamente la mitad, que la producida por la Luna.

e) La fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre un objeto de masa m situado en su superficie es:

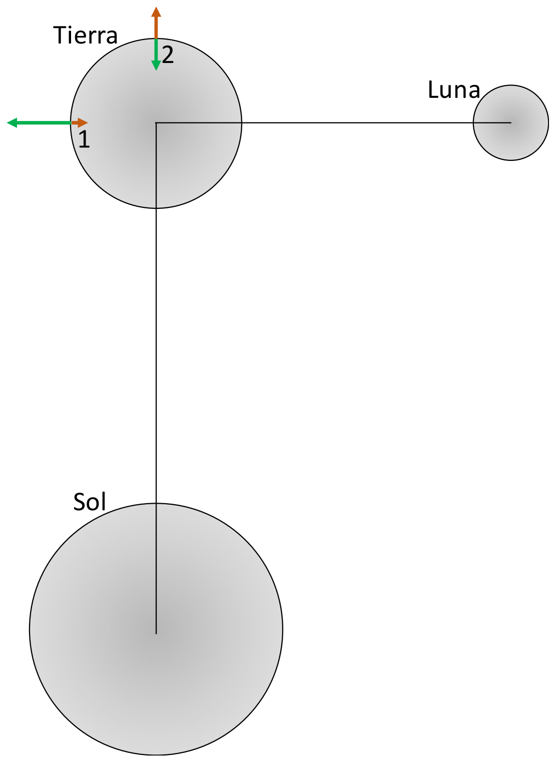
$$\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{m},\boldsymbol{Tierra}} = \frac{GM_T m}{R_T^2}\boldsymbol{r} \qquad (\mathbf{5})$$

Por lo que el cociente entre (1) y (5) será:

$$\frac{F_{m,P}}{F_{m,Tierra}} = \frac{GM_L m \frac{2R_T}{D_{TL}^3}}{\frac{GM_T m}{R_T^2}} = \frac{M_L}{M_T} 2 \left(\frac{R_T}{D_{TL}}\right)^3 = \frac{7.35\text{x}10^{22}}{5.98\text{x}10^{24}} 2 \left(\frac{6.37\text{x}10^6}{3.84\text{x}10^8}\right)^3 = 1.12\text{x}10^{-7}$$

Esta cifra nos indica que las fuerzas de marea son muy pequeñas comparadas con la fuerza de atracción de la Tierra sobre un objeto de masa m situado en su superficie, pero sus efectos son notables.

f) El dibujo muestra en color verde las fuerzas de marea debidas a la Luna en donde el vector en 1 es el doble de largo que en 2 pues habíamos visto que en un punto tipo S la fuerza de marea debida a la Luna es la mitad que la que aparece en el punto tipo P. Si dibujamos ahora en naranja las fuerzas de marea debidas al Sol debemos tener en cuenta que la fuerza de marea en 1 creada por la Luna debe ser un poco mayor que el doble de la producida por el Sol en el punto 2. Tenemos, que en el punto 2 prácticamente se compensan y, por lo tanto, $F_{m,1} > F_{m,2}$.



Problema 2: Calculadora de carga eléctrica

(a) Si ignoramos los efectos de la gravedad tendremos un movimiento parabólico donde la fuerza vertical es la originada por el campo eléctrico que, al ser la carga negativa, irá dirigida en el sentido negativo del eje vertical.

$$\boldsymbol{F} = -q\boldsymbol{E} = m\boldsymbol{a}, \text{ con } a_x = 0 \text{ y } a_y = -\frac{qE}{m}$$

(b) Usando las siguientes condiciones iniciales:

$$v_{0,x} = v \qquad v_{0,y} = 0 \qquad x_0 = 0 \qquad y_0 = 3d$$

escribimos las ecuaciones del movimiento parabólico:

$$v_x(t) = v + a_x t = v \qquad v_y(t) = 0 + a_y t = -\frac{qE}{m}t$$

$$x(t) = 0 + v_{0,x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 = vt \qquad y(t) = 3d + v_{0,y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 = 3d - \frac{1}{2}\frac{qE}{m}t^2$$

(c) Evidentemente, el tiempo que tarda la partícula en recorrer la zona de campo es:

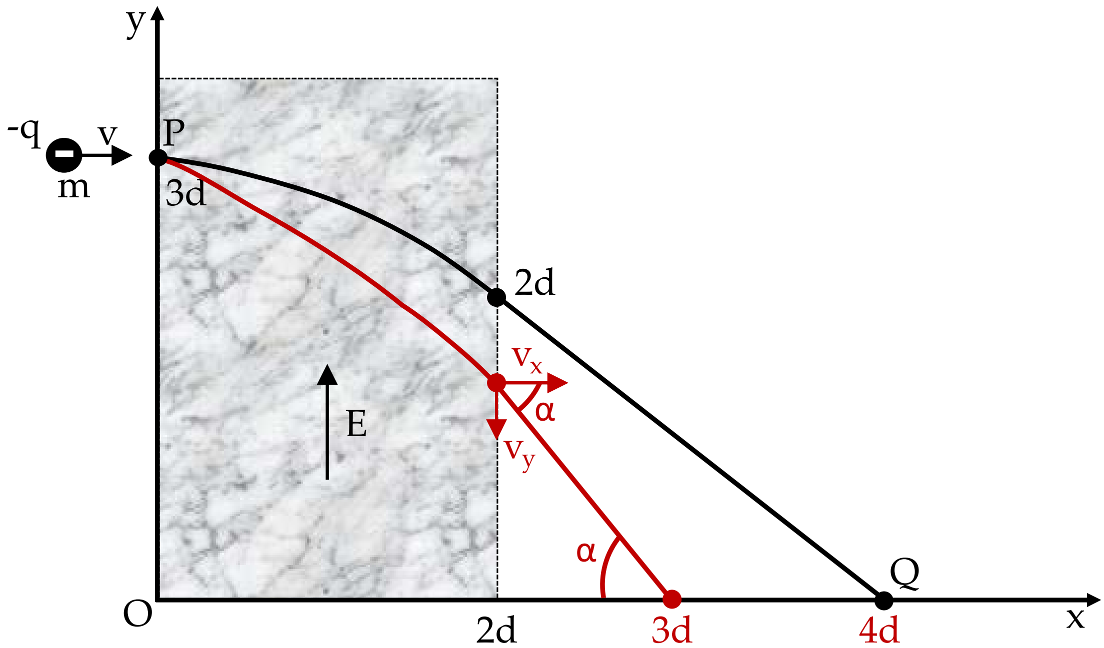
$$t = \frac{2d}{v}$$

Para este tiempo nos dicen que la partícula sale a una altura 2d, y, por lo tanto:

$$2d = 3d - \frac{1}{2}\frac{qE}{m}\left(\frac{2d}{v}\right)^2$$

Es decir, las magnitudes de los datos del problema han de verificar que:

$$E = \frac{mv^2}{2qd} \qquad \textbf{(1)}$$



(d) Una vez que la partícula sale de la zona de campo eléctrico lleva un movimiento uniforme con las siguientes componentes para cada una de las velocidades:

$$v_x = v \qquad\qquad v_y\left(t = \frac{2d}{v}\right) = -\frac{qE}{m}\frac{2d}{v}$$

Para calcular la distancia recorrida en horizontal debemos simplemente calcular primero el tiempo, t_s, que tarda en llegar al suelo. Es decir, el tiempo en recorrer una distancia 2d en vertical:

$$y(t = t_s) = 2d = v_y t_s \rightarrow t_s = \frac{2d}{\frac{qE}{m}\frac{2d}{v}} = \frac{mv}{qE}$$

El espacio recorrido en horizontal es entonces este tiempo t_s multiplicado por la velocidad horizontal:

$$\Delta x(t = t_s) = v_x t_s = v t_s = v\frac{mv}{qE} = \frac{mv^2}{qE} = 2d$$

en donde hemos usando la ecuación (1).

Por lo tanto, la distancia al origen del punto Q es:

$$x = 2d + \Delta x(t = t_s) = 2d + 2d = 4d$$

(e) El tiempo que tarda la segunda partícula en atravesar la zona de campo eléctrico es el mismo pues la velocidad horizontal es igual. Podemos calcular entonces la altura a la que sale d′:

$$y\left(t = \frac{2d}{v}\right) = d' = 3d - \frac{1}{2}\frac{q'E}{m}\left(\frac{2d}{v}\right)^2$$

en donde usando la ecuación (1) obtenemos:

$$d' = 3d - d\frac{q'}{q} \qquad \mathbf{(2)}$$

Al salir la partícula de la zona de campo eléctrico describe una trayectoria rectilínea en donde podemos escribir que:

$$\tan(\alpha) = \frac{d'}{d} \qquad \mathbf{(3)}$$

La clave es darse cuenta que podemos escribir también esa tangente del ángulo α en función de las componentes de las velocidades que, prescindiendo del signo, es:

$$\tan(\alpha) = \frac{v'_y}{v'_x} = \frac{\frac{q'E}{m}\frac{2d}{v}}{v} = \frac{2Ed}{mv^2}q' = \frac{q'}{q} \qquad \mathbf{(4)}$$

donde hemos vuelto a emplear la ecuación (1). Por lo tanto*:

$$\frac{q'}{q} = \frac{d'}{d} \qquad \mathbf{(5)}$$

Usando (2) y (5) tenemos que:

$$\frac{q'}{q} = 3 - \frac{q'}{q}$$

Es decir:

$$q' = \frac{3}{2}q$$

---

*La expresión (5) también se puede obtener de la siguiente manera. Por analogía, podemos escribir para la partícula q' las siguientes componentes de las velocidades en el punto d' justo al salir de la zona de campo eléctrico:

$$v_x = v \qquad\qquad v_y\left(t = \frac{2d}{v}\right) = -\frac{q'E}{m}\frac{2d}{v}$$

Como esta segunda partícula impacta en el suelo a una distancia 3d del origen podemos calcular el tiempo, t_s', que tarda en recorrer la distancia d en horizontal:

$$\Delta x(t = t_s') = v_x t_s' = v t_s' = d \rightarrow t_s' = \frac{d}{v}$$

Por lo tanto, la distancia d' recorrida en vertical hasta impactar con el suelo será:

$$y(t = t_s') = d' = v_y t_s' = \frac{q'E}{m}\frac{2d}{v}\frac{d}{v} = \frac{q'2Ed}{mv^2} = \frac{q'}{q}d$$

donde hemos vuelto a emplear la ecuación (1).

$$\frac{d'}{d} = \frac{q'}{q} \qquad (\mathbf{5})$$

Problema 3: Determinación de la tensión superficial de un líquido

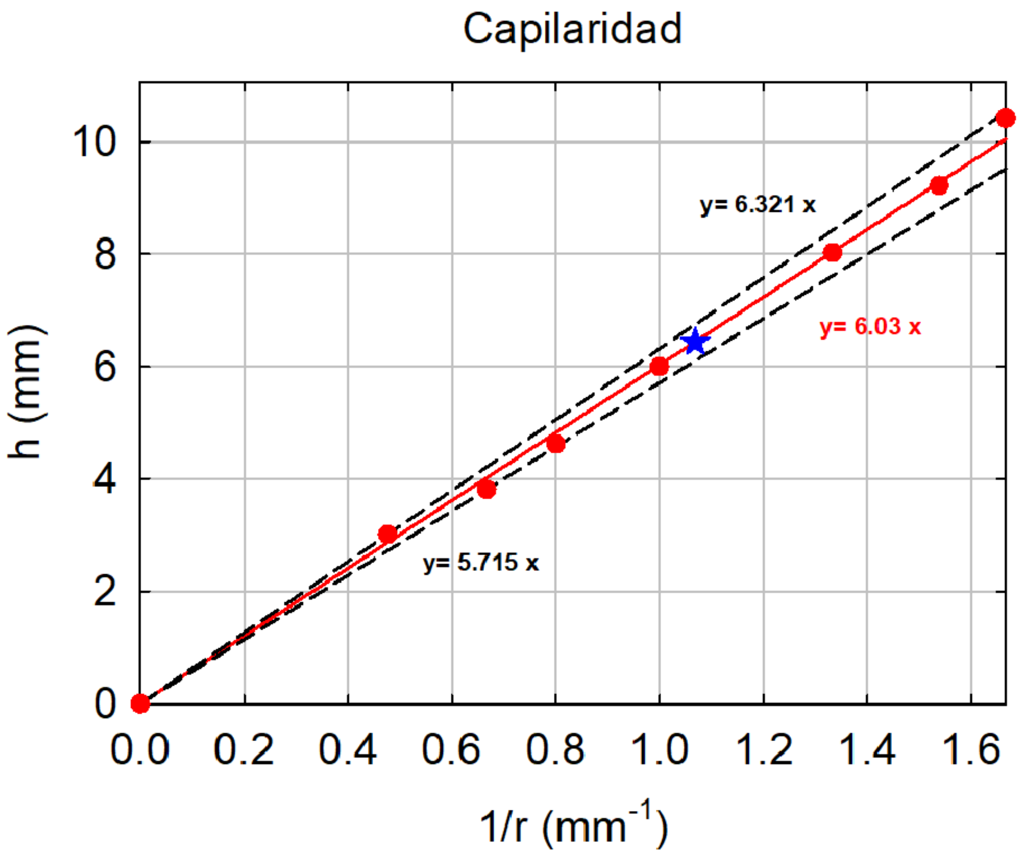
(a) Definiendo la variable z=1/r tenemos ya una relación lineal de h frente a z:

$$h=\frac{2\gamma}{\rho g}z \qquad (1)$$

Completamos la tabla:

r (mm)	0.60	0.65	0.75	1.00	1.25	1.50	2.10
h (mm)	10.4	9.22	8.03	6.00	4.62	3.81	3.01
z=1/r (mm^{-1})	1.67	1.54	1.33	1.00	0.80	0.67	0.48

(b) En la siguiente gráfica se ha realizado el correspondiente análisis, donde los puntos rojos corresponden a la tabla anterior y la recta roja es la línea de tendencia lineal. La estrella azul corresponde al punto medio con coordenadas (1.07, 6.44).



(c) Dado que la recta buscada ha de pasar por el punto (0,0) tenemos que dibujar, línea roja, la recta que pasa por el origen y el punto medio.

$$h=6.03\ x \qquad (2)$$

Al comparar la recta de regresión con la ecuación (1) se observa que:

$$\frac{2\gamma}{\rho g}=6.03\ mm^2$$

Con lo que la tensión superficial es:

$$\gamma = 23.3 \text{x} 10^{-3} \text{ N/m}$$

Para determinar la incertidumbre de la tensión superficial se usan las rectas (a trazos negros en la gráfica) que pasan por el origen (0,0) y ajustan la distribución por arriba o por abajo.

pendiente máxima → y = 6.321x

pendiente mínima → y = 5.715x

La incertidumbre en la pendiente:

$$\Delta(\text{pendiente}) = (6.321-5.715)/2 = 0.606 \text{ mm}^2$$

Así tenemos que:

$$\frac{2\gamma}{\rho g} = (6.03 \pm 0.61) \text{ mm}^2$$

Finalmente expresamos el resultado en unidades del Sistema Internacional con su error:

$$\gamma = (23.3 \pm 2.3) \text{x} 10^{-3} \text{ N/m}$$

(d) Para un capilar de radio 1.11 mm simplemente tenemos que usar la recta roja, ecuación (2) para $x = 1/(1.11 \text{ mm}) = 0.9 \text{ mm}^{-1}$:

$$h = (6.03 \pm 0.61)x = (5.43 \pm 0.55) \text{mm}$$