Problema 1: Caída de una bola en un estanque

1. En primer lugar, determinamos la velocidad de la esfera al llegar a la superficie del estanque:

$$E_P = E_C \Rightarrow mgh = \frac{1}{2}mv^2$$
$$v = \sqrt{2 \cdot 9.8 \cdot 10} = 14 \text{ m/s}$$

Ahora calculamos la aceleración de la esfera dentro del agua, que usando el Principio de Arquímedes nos lleva a:

$$p - E = ma \Rightarrow \rho_s g V_s - \rho_l g V_s = \rho_s V_s a$$

$$a = \frac{(\rho_s - \rho_l)g}{\rho_s} \Rightarrow a = \frac{(7500 - 1000) \cdot 9.8}{7500} = 8.49 \text{ m/s}^2$$

Con estos datos ya podemos calcular el tiempo que tarda la bola en llegar al fondo del estanque desde su superficie:

$$e = v_i \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2$$
$$5 = 14 \cdot t + \frac{8.49}{2} \cdot t^2$$
$$0 = -5 + 14 \cdot t + 4.245 \cdot t^2$$

$$t = 0.325 \text{ s}$$

2. La energía cinética y potencial por unidad de masa antes de soltar la esfera:

$$\frac{T_i}{m} = \frac{\frac{1}{2}m0^2}{m} = 0 \text{ J/kg}$$
$$\frac{V_i}{m} = \frac{m \cdot 9.8 \cdot 10}{m} = 98 \text{ J/kg}$$

Para calcular la energía cinética en el fondo del estanque necesitamos la velocidad de la bola al llegar al fondo:

$$v_f = v_i + a \cdot t = 14 + 8.49 \cdot 0.33 = 16.76 \text{ m/s}$$

Ahora ya podemos calcular energía cinética y potencial por unida de masa en el fondo del estanque:

$$\frac{T_f}{m} = \frac{\frac{1}{2}m16.76^2}{m} = 140.47 \text{ J/kg}$$
$$\frac{V_f}{m} = \frac{m \cdot 9.8 \cdot (-5)}{m} = -49 \text{ J/kg}$$

Evaluamos ahora la suma de ambas antes de soltar la bola y en el fondo del estanque:

$$\frac{E_{Tot,inicial}}{m} = 0 + 98 = 98\ \mathrm{J/kg}$$

$$\frac{E_{Tot,final}}{m} = 140.47 - 49 = 91.47\ \mathrm{J/kg}$$

La energía así calculada parece no conservarse, nos faltan 6.53 J/kg. Pero esto NO es una violación del principio de conservación de la energía porque nos hemos olvidado de incluir la energía potencial del líquido desalojado. Equivale a considerar ese volumen ascendiendo los 5 metros:

$$\frac{V_l}{m} = \frac{m_l}{m} gh = \frac{\rho_l}{\rho_s} gh = \frac{1000}{7500} \cdot 9.8 \cdot 5 = 6.53\ \mathrm{J/kg}$$

3. Como la densidad de la esfera ha cambiado debemos volver a calcular la aceleración de la esfera dentro del agua:

$$a = \frac{(\rho_s - \rho_l)g}{\rho_s} \Rightarrow a = \frac{(300 - 1000) \cdot 9.8}{300} = -22.87\ \mathrm{m/s^2}$$

Con este dato usando la expresión del movimiento MRUA calculamos el tiempo que tarda la esfera en detenerse:

$$v_f = v_i + a \cdot t \Rightarrow t = \frac{v_f - v_i}{a}$$

$$t = \frac{0 - 14}{-22.87} \Rightarrow t = 0.61\ \mathrm{s}$$

La profundidad que alcanza la esfera en el estanque:

$$e = v_i \cdot t + \frac{a}{2} \cdot t^2 \Rightarrow e = 14 \cdot 0.61 + \frac{-22.87}{2} \cdot 0.61^2$$

$$e = 4.29\ \mathrm{m}$$

4. Para los cálculos en el nuevo planeta necesitamos conocer la aceleración de la gravedad nueva:

$$\frac{g_P}{g_T} = \frac{G \cdot M_p/R_p^2}{G \cdot M_T/R_T^2} = \frac{M_T/(R_T/2)^2}{M_T/R_T^2} = 4$$

$$g_P = 4 \cdot g_T = 4 \cdot 9.8 = 39.2 \cdot \mathrm{m/s^2}$$

Una vez tenemos este dato es inmediato calcular el tiempo que tarda en llegar al suelo desde una altura de 10 m:

$$e = \frac{g}{2} \cdot t^2 \Rightarrow 10 = \frac{39.2}{2} \cdot t^2 \Rightarrow t \approx 0.7\ \mathrm{s}$$

Problema 2: Muelles en serie y en paralelo

1. En el caso de los muelles en **paralelo**, la deformación en ambos es la misma mientras que las fuerzas en cada uno de ellos son diferentes:

$$F_a = -k_a x$$
$$F_b = -k_b x$$

Sobre el conjunto actúa una fuerza $F_p = F_a + F_b = k_p x$, por lo que

$$F_p = -k_a x - k_b x = -(k_a + k_b)x$$

Y la constante elástica equivalente en paralelo será:

$$k_p = k_a + k_b$$

En el caso de los muelles en serie, la fuerza de deformación en ambos es la misma mientras que en cada uno de ellos la deformación es diferente:

$$F = -k_a x_a$$
$$F = -k_b x_b$$

La deformación total viene dada por $x_s = x_\mathrm{a} + x_\mathrm{b}$. Es decir:

$$x_s = x_a + x_b = -\frac{F_s}{k_s} = -\frac{F}{k_a} - \frac{F}{k_b}$$

$$\frac{1}{k_s} = \frac{1}{k_a} + \frac{1}{k_b}$$

ya que $F_\mathrm{s} = F$. Y la constante recuperadora equivalente en serie es:

$$k_s = \frac{k_a k_b}{k_a + k_b}$$

2. En el diagrama de la izquierda tenemos la asociación en paralelo de dos pares de muelles en serie. Así, de acuerdo con el ejercicio anterior tendremos:

$$k_\mathrm{izq} = \frac{k_1 k_3}{k_1 + k_3} + \frac{k_2 k_4}{k_2 + k_4}$$

A la derecha vemos dos pares de muelles en paralelo y asociados entre sí en serie:

$$k_\mathrm{der} = \frac{(k_1 + k_2)(k_3 + k_4)}{(k_1 + k_2) + (k_3 + k_4)}$$

Igualando y despejando, los sistemas son equivalentes si y solo si:

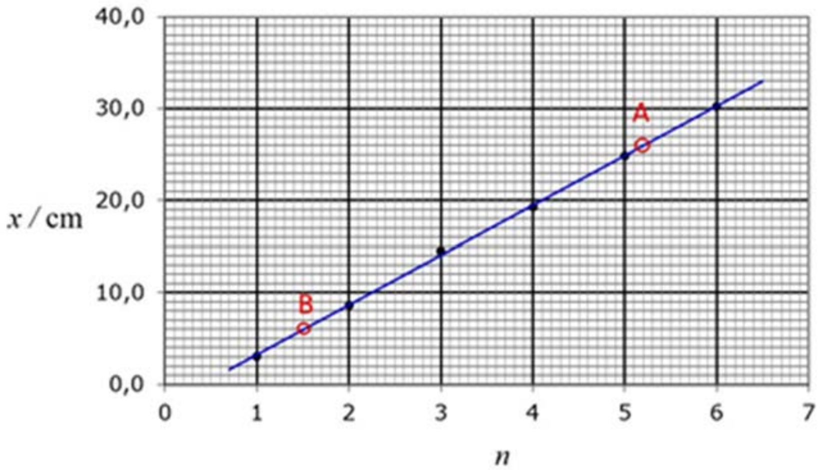
$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{k_3}{k_4}$$

Problema 3: Ondas estacionarias

1.

n	x_n / cm
1	3,0
2	8,6
3	14,5
4	19,3
5	24,8
6	30,2

2.



3. De la gráfica anterior podemos obtener:

$$\text{pendiente} = \frac{26,0 - 6,0}{5,2 - 1,5} = 5,4 \text{ cm}$$

$$\frac{\lambda}{2} = 5,4 \text{ cm} \rightarrow \lambda = 10,8 \text{ cm} = 0,108 \text{ m}$$

4. Usando la ecuación (1) $v = \lambda \cdot f$, la velocidad de propagación del sonido

$$v = 0,108 \text{ m} \times 3,13 \times 10^3 \text{ s}^{-1} = 338 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

El gas que contiene el tubo es aire y el experimento se ha realizado a 19 ºC, A esta temperatura la velocidad del sonido en el aire es 343 m·s^{-1}.