Soluciones

Ejercicio 1 **(1 punto)** Según la definición, que el mar tenga una salinidad s significa que por cada 100 g de agua pura, hay s gramos de sal. Cojamos un volumen V de agua de mar y supongamos que contiene una masa m_a de agua pura y una masa m_s de sal. Dado que nos dicen que podemos despreciar el cambio de volumen, es claro que $V = m_a/\rho_0$. Por tanto,

$$\rho_s = \frac{m_a + m_s}{V} = (1+s)\rho_0.$$

Esta expresión cuadra con el hecho que la densidad aumenta con la salinidad. La densidad del Ártico sería por tanto $\rho_{Artico} = (1 + 0{,}03)\rho_0 = 1030$ kg/m^3.

Corrección: Llegar a la fórmula de ρ_s, 0.8 puntos. Aplicación numérica, 0.2 puntos.

Ejercicio 2 **(1.5 puntos)** Por el principio de Arquímedes, el empuje en la dirección vertical que experimenta el hielo es $E = \rho_s V_{des} g$, donde $V_{des} = \pi r^2(h-a)$ es el volumen de agua líquida desalojado. El peso del iceberg es $P = \rho_h V_h g$, siendo $V_h = \pi r^2 h$ el volumen total del iceberg. Igualando ambas expresiones y despejando a,

$$h - a = \frac{\varepsilon}{1+s}h \quad \Longleftrightarrow \quad a = \frac{1+s-\varepsilon}{1+s}h. \tag{1}$$

Para un iceberg en el océano Ártico,

$$a = \frac{1 + 0{,}03 - 0{,}9}{1 + 0{,}03}h \simeq 0{,}13h.$$

Esto significa que el 87 % del iceberg se encuentra bajo la superficie del océano.

Corrección: Llegar a la fórmula de a, 1.2 puntos. Aplicación numérica, 0.3 puntos.

Ejercicio 3 **(2.5 puntos)** Si se sumerge el iceberg una distancia δ respecto de su posición de equilibrio, el nuevo empuje viene dado por $E = \pi r^2 \rho_s g(h - a + \delta)$, mientras que el peso sigue siendo el mismo. Por tanto, se produce una fuerza neta ascendente con módulo $F = \pi r^2 \rho_s g \delta$ que hará que el iceberg ascienda. Si despreciamos cualquier rozamiento con el agua, por conservación de la energía el iceberg ascenderá hasta quedar a una distancia δ por encima de su posición de equilibrio. En este caso el empuje es $E = \pi r^2 \rho_s g(h - a - \delta)$, que es menor que el peso, luego la fuerza neta será descendente con módulo $F = \pi r^2 \rho_s g \delta$ y el iceberg descenderá. En definitiva, se producirá un movimiento de tipo oscilatorio.

Por la segunda ley de Newton,

$$F = m_h \ddot{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \pi r^2 \rho_s g x = \pi r^2 h \rho_h \ddot{x} \quad \Longleftrightarrow \quad \ddot{x} + \frac{(1+s)g}{\varepsilon h}x = 0. \tag{2}$$

Dado que la fuerza es proporcional a la distancia y tiene sentido opuesto al desplazamiento (como en la ley de Hooke), el movimiento será armónico simple y la altura emergida respecto del equilibrio será

$$x(t) = -\delta \cos(\omega t) \tag{3}$$

con una frecuencia que vendrá dada por $\omega^2 = \frac{(1+s)g}{\varepsilon h}$. Observamos que cuanto más largo es el iceberg, menor es su frecuencia de oscilación. También vemos que esta frecuencia no depende de r. El periodo de este movimiento viene dado por $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

Para determinar la velocidad máxima lo haremos de dos maneras. En primer lugar, derivando la trayectoria,

$$\dot{x}(t) = \delta\omega \sin(\omega t),$$

que toma su valor máximo (en módulo) cuando $x = 0$ y vale

$$v_{max} = \delta\omega = \sqrt{\frac{(1+s)g\delta^2}{\varepsilon h}}.$$

Otra forma de hacerlo es por conservación de la energía. Para un oscilador la energía vale

$$E = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2. \tag{4}$$

Observando las ecuaciones (2) y (3) podemos identificar

$$A = \delta, \qquad \frac{k}{m} = \frac{(1+s)g}{\varepsilon h},$$

de donde usando que v es máxima en $x = 0$ (ver (4)) se deduce que

$$v_{max}^2 = \frac{(1+s)g\delta^2}{\varepsilon h},$$

que es lo que obtuvimos anteriormente.

Corrección: Diagrama de fuerzas, 0.5 puntos. Segunda ley de Newton, 0.5 puntos. Análisis cualitativo del movimiento, 0.5 puntos. Encontrar $x(t)$, 0.5 puntos. Hallar la velocidad máxima, 0.5 puntos.

Ejercicio 4 **(1.5 puntos)** Como las dimensiones del océano son mucho mayores a las del iceberg es de esperar que la temperatura de equilibrio coincida con la temperatura inicial del océano, es decir, T_0. Por tanto, el calor transferido al iceberg será la suma de tres calores: (i) el calor para aumentar la temperatura del hielo desde T_h hasta los 0º C, (ii) el calor necesario para fundir el hielo, y (iii) el calor para aumentar la temperatura del iceberg ya fundido hasta T_0. Si llamamos m a la masa del iceberg, este calor vendrá dado por

$$Q = m\left(c_h(0^{\text{o}}\ \text{C} - T_h) + c_f + c_l(T_0 - 0^{\text{o}}\ \text{C})\right).$$

También lo podemos escribir en términos de los parámetros del problema usando que $m = \rho V$,

$$Q = \pi r^2 h \rho_h \left(c_h (0^{\text{o}}\ \text{C} - T_h) + c_f + c_l (T_0 - 0^{\text{o}}\ \text{C}) \right).$$

Sustituyendo los valores del enunciado, se obtiene $Q \simeq 1{,}27 \times 10^{14}$ J. El consumo mensual promedio de un hogar es de unos $270\,\text{kWh} = 2{,}7 \times 10^5\,\text{W} \cdot 3{,}6 \times 10^3\,\text{s} \simeq 9{,}72 \times 10^8\,\text{J}$, por lo que si hacemos el cociente entre ambos

$$\frac{1{,}27 \times 10^{14}}{9{,}72 \times 10^8} \simeq 1{,}31 \times 10^5.$$

Esto equivale al consumo energético mensual de una ciudad como Salamanca. Este número es tan elevado debido tanto al enorme tamaño del iceberg como a la elevada capacidad calorífica del agua.

Corrección: Argumentar que $T_{eq} = T_0$, 0.5 puntos. Hallar el calor transferido, 0.5 puntos. Aplicación numérica, 0.5 puntos.

Ejercicio 5 **(1 punto)** Por análisis dimensional es claro que κ tiene dimensiones de

$$\text{Energía} \cdot \text{Superficie}^{-1} \cdot \text{Temperatura}^{-1} \cdot \text{Tiempo}^{-1},$$

o equivalentemente,

$$\text{Masa} \cdot \text{Temperatura}^{-1} \cdot \text{Tiempo}^{-3}.$$

Por tanto, sus unidades en el SI serían $\frac{\text{kg}}{\text{K} \cdot \text{s}^3}$. Físicamente, κ mide el calor transferido por unidad de tiempo, temperatura y superficie.

Corrección: Análisis dimensional, 0.7 puntos. Explicación física, 0.3 puntos.

Ejercicio 6 **(2.5 puntos)** Una posible manera de estimar este tiempo sería calcular la superficie "media" de contacto durante el proceso, que será la mitad del área inicial de contacto, esto es

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \left(\pi r^2 + 2\pi r (h - a) \right) = \frac{\pi r}{2} \left(r + \frac{2\varepsilon}{1+s} h \right) \approx 6{,}4 \times 10^5\,\text{m}^2.$$

A continuación calculamos el calor necesario para que el hielo se funda, que como vimos en el ejercicio 4 viene dado por $Q = \pi r^2 h \rho_h c_f$. Por tanto, el tiempo estimado que tarda en fundirse el iceberg viene dado por

$$\tau \approx \frac{\pi r^2 h \rho_h c_f}{\kappa T_0 \langle S \rangle} = \frac{2 h \varepsilon c_f \rho_0}{\kappa T_0 \left(1 + \frac{2\varepsilon}{1+s} \frac{h}{r} \right)}.$$

Usando los datos numéricos se obtiene que $h \approx 177$ m por lo que $\tau \approx 2{,}6 \cdot 10^6$ s, lo que equivale a unos 30 días. Otra posible manera sería hacer el cálculo con la superficie en $r/2$, que sería

$$S_{r/2} = \pi \left(\frac{r}{2} \right)^2 + 2\pi \frac{r}{2} (h - a) = \pi r \left(\frac{r}{4} + \frac{\varepsilon}{1+s} h \right) \approx 5{,}6 \times 10^5\,\text{m}^2,$$

de manera que $\tau \approx 2{,}9 \times 10^6\,\mathrm{s}$, que corresponden a aproximadamente 34.5 días. Observamos que el resultado es mayor que al tomar la superficie promedio, pues $\langle S \rangle = S_{r/2} + \pi r^2/4 > S_{r/2}$.

A continuación vamos a hallar este tiempo de manera exacta. En primer lugar sabemos que el calor transferido por unidad de tiempo viene dado por $\dot{Q} = \kappa T_0 S = \pi \kappa T_0 r(t)\,(r(t) + 2(h-a))$, donde observemos que la única magnitud que varía con el tiempo es $r(t)$, pues tanto h como a con constantes durante el proceso. Por otro lado, derivando la ecuación $Q = c_f m_h$ y teniendo en cuenta que $m_h = \rho_h \pi r^2 h$, obtenemos $\dot{Q} = -2\pi\varepsilon\rho_0 c_f h r(t)\dot{r}(t)$, donde el signo negativo viene de que la masa del hielo disminuye a medida que éste se funde. Igualando las dos expresiones que tenemos para $\dot{Q}$ se llega a

$$\dot{r}(t) = -\frac{\kappa T_0}{2h\varepsilon\rho_0 c_f}\left(r(t) + \frac{2\varepsilon}{1+s}h\right),$$

donde hemos usado (1). Integrando,

$$\int_r^0 \frac{dr}{r + \dfrac{2\varepsilon}{1+s}h} = -\frac{\kappa T_0}{2h\varepsilon\rho_0 c_f}\int_0^\tau dt \quad\Longrightarrow\quad \tau = \frac{2h\varepsilon\rho_0 c_f}{\kappa T_0}\log\left(1 + \frac{1+s}{2\varepsilon}\frac{r}{h}\right).$$

Usando los datos numéricos se obtiene $\tau \approx 3 \times 10^6\,\mathrm{s}$, que son unos 34.5 días. Observamos que este resultado coincide con la aproximación de tomar como superficie $S_{r/2}$.

Corrección: Haciéndolo con cualquiera de las aproximaciones, 1.5 puntos (1 punto la fórmula + 0.5 la aplicación numérica). Haciéndolo de manera exacta, 2.5 puntos (2 puntos la fórmula + 0.5 la aplicación numérica).

Soluciones

Ejercicio 1

$$t = \frac{e}{c} = \frac{0{,}47 \times 10^{-10}(m)}{3 \times 10^{8}(m/s)} = 1{,}57 \times 10^{-19}(s) = 0{,}157(as) \tag{2}$$

Ejercicio 2

$$c = v = \frac{\omega}{k} = \frac{2\pi\nu}{2\pi\lambda^{-1}} = \lambda\nu = \frac{\lambda}{T} \tag{3}$$

$$\lambda = cT = 3 \times 10^{8}(m/s) \times 0{,}157 \times 10^{-18}(s) = 0{,}47 \times 10^{-10}(m) = 0{,}47(\mathring{A}) \tag{4}$$

Ejercicio 3

$$\Delta\nu = \frac{0{,}44}{43 \times 10^{-18}(s)} = 1{,}023 \times 10^{16}(s^{-1} = 10{,}23PHz) \tag{5}$$

Ejercicio 4 Para la longitud de onda de 6.5 nm:

$$T = \frac{\lambda}{c} = \frac{6{,}5 \times 10^{-9}(m)}{3 \times 10^{8}(m/s)} = 2{,}17 \times 10^{-17}(s) \tag{6}$$

$$\text{nº de oscilaciones} = \frac{\Delta t}{T} = \frac{43 \times 10^{-18}(s)}{2{,}17 \times 10^{-17}(s)} = 2{,}03 \tag{7}$$

Para la longitud de onda de 120 nm:

$$T = \frac{\lambda}{c} = \frac{120 \times 10^{-9}(m)}{3 \times 10^{8}(m/s)} = 4 \times 10^{-16}(s) \tag{8}$$

$$\text{nº de oscilaciones} = \frac{\Delta t}{T} = \frac{43 \times 10^{-18}(s)}{4 \times 10^{-16}(s)} = 0{,}11 \tag{9}$$

Conclusión: como un pulso de luz tiene que estar formado por al menos una oscilación del campo eléctrico, solo podría elegir el láser de 6.5 nm de longitud de onda.

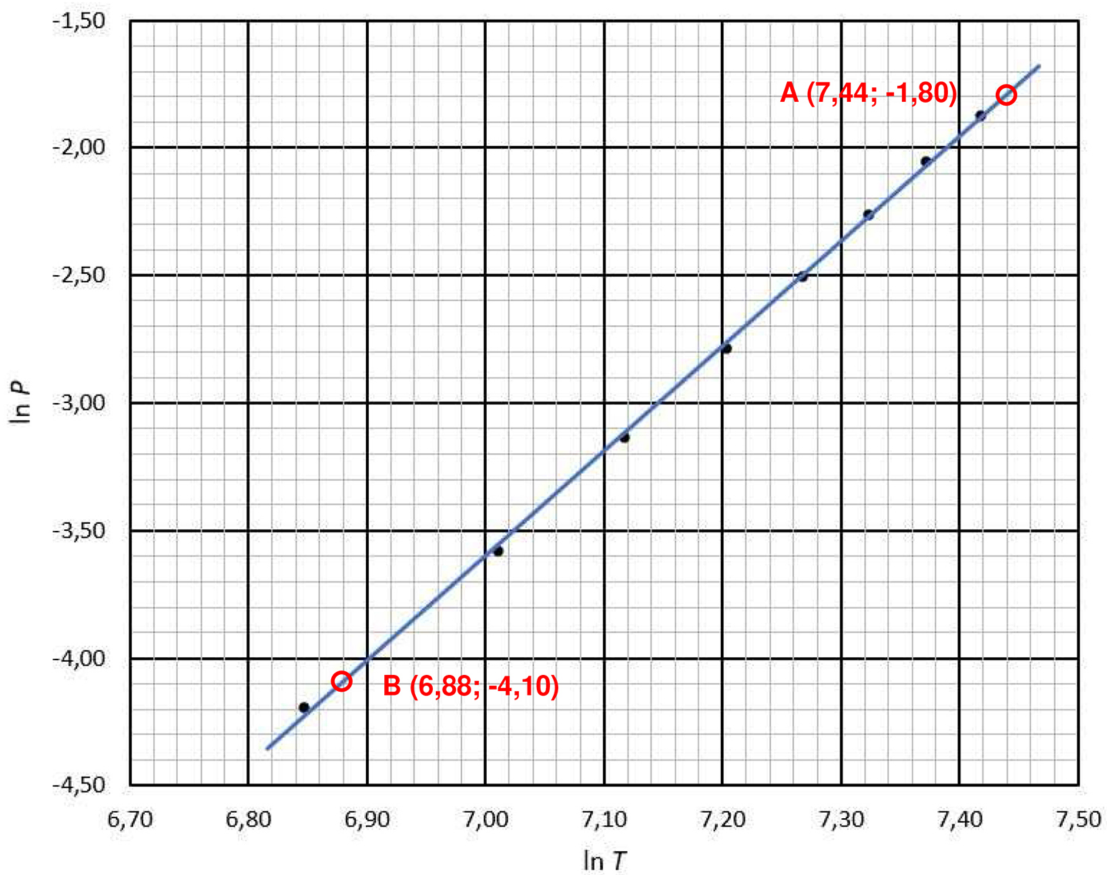
Resolución problema 3: Radiación y temperatura de una bombilla

a) Traslada las medidas a una tabla. (4 puntos)

La temperatura ambiente y la resistencia del filamento a esa temperatura son: $T_0 = 294$ K y $R_0 = 16{,}3\,\Omega$

V / V	I / A	$R = \frac{V}{I}$ / Ω	$T = \frac{T_0}{R_0^{0,83}} R^{0,83}$ / K	$P = VI$ / W	ln$T$	ln$P$
1,00	$1{,}51\times10^{-2}$	66,2	941	$1{,}51\times10^{-2}$	6,85	-4,19
1,50	$1{,}86\times10^{-2}$	80,7	1108	$2{,}79\times10^{-2}$	7,01	-3,58
2,00	$2{,}18\times10^{-2}$	91,7	1234	$4{,}36\times10^{-2}$	7,12	-3,13
2,50	$2{,}46\times10^{-2}$	101,6	1343	$6{,}15\times10^{-2}$	7,20	-2,79
3,00	$2{,}73\times10^{-2}$	109,9	1433	$8{,}19\times10^{-2}$	7,27	-2,50
3,50	$2{,}98\times10^{-2}$	117,4	1514	$1{,}04\times10^{-1}$	7,32	-2,26
4,00	$3{,}21\times10^{-2}$	124,6	1591	$1{,}28\times10^{-1}$	7,37	-2,05
4,50	$3{,}42\times10^{-2}$	131,6	1664	$1{,}54\times10^{-1}$	7,42	-1,87

b) Representa en papel milimetrado los valores de $\ln P$ (en ordenadas) frente a los correspondientes valores de $\ln T$ (en abscisas). (3 puntos)



c) A partir de dos puntos elegidos de la recta, y aplicando la expresión (5), determina el valor de la pendiente. El valor de n que se busca es el valor entero más próximo al de la pendiente obtenida. **(3 puntos)**

Para determinar la pendiente de la recta se eligen dos puntos de la misma, A y B, suficientemente separados, cuyas coordenadas son:

$$A\,(\ln T_A, \ln P_A) \rightarrow A\,(7,44; -1,80)$$

$$B\,(\ln T_B, \ln P_B \rightarrow B\,(6,88; -4,10)$$

La pendiente de la recta es:

$$\text{pendiente} = \frac{\ln P_A - \ln P_B}{\ln T_A - \ln T_B} = \frac{-1,80 - (-4,10)}{7,44 - 6,88} = 4,11.$$

Por lo tanto, el valor entero pedido es

$$n = 4.$$