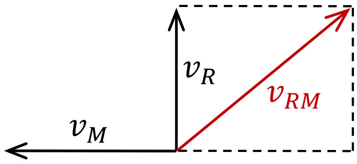
Problema 1

1. La velocidad orbital de Marte alrededor del Sol viene dada por:

$$v_M = \sqrt{\frac{G\,M_S}{r}} = \sqrt{\frac{6.67\times10^{-11}\cdot1.99\times10^{30}}{2.28\times10^{-11}}} = 24.1\ \text{km/s}$$

2. La velocidad relativa de Rosetta con respecto a Marte vendrá dada por la siguiente relación:

$$v_{RM} = \sqrt{v_M^2 + v_R^2} = 31.3\ \text{km/s}$$



3. La energía total vendrá dada por la suma de las energías cinética y potencial.

$$E = -\frac{\mathrm{G}\,M_M\,m_R}{r} + \frac{1}{2}m_R\,v^2$$
$$= 3\times10^3\left(-\frac{6.67\times10^{-11}\cdot6.42\times10^{23}}{3.4\times10^6+2.5\times10^5} + \frac{1}{2}(31.3\times10^3)^2\right)$$
$$= 1.43\times10^{12}\ \mathrm{J}$$

Como esta energía es positiva, podemos concluir que la nave Rosetta saldrá del campo gravitatorio de Marte.

4. Aplicando conservación de la energía:

$$E = E' = \frac{1}{2}m_R\,v_{RM}'^2$$

$$v'_{RM} = \sqrt{\frac{2E}{m_R}} = \sqrt{\frac{2\cdot1.43\times10^{12}}{3\times10^3}} = 30.9\ \text{km/s}$$

Problema 2

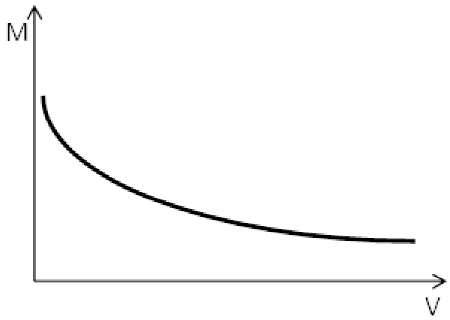
5. Sobre el área frontal A_f impacta el volumen de agua barrido por el corredor durante la carrera. Por tanto, la cantidad de agua recibida será:

$$M_f = \rho\,A_f\,L$$

6. Sobre la parte superior A_s impacta la siguiente cantidad de agua:

$$M_s = \rho\,A_s\,v_0\,t = \rho\,A_s v_0\frac{L}{v} = \rho\,A_s\,L\frac{v_0}{v}$$

7. La cantidad de agua total M tiene dos sumandos: uno que cae como $1/v$ y otro es constante ($\rho\,A_f\,L$). Por tanto:



8. La cantidad de agua sobre la superficie superior decrece con la velocidad mientras que la recibida en la superficie frontal es independiente de aquélla.
9. Para el caso numérico propuesto:

$$M = 0.003 \times 10000\left(0.04 \times \frac{2}{4} + 0.34\right) = 10.8 \text{ kg},$$

de los cuales son 0.6 kg en cabeza y hombros y 10.2 kg (casi todo) en pecho y piernas. Si pensamos en una velocidad de 0.8 m/s (como ir andando) serían 3 y 10.2 kg respectivamente.

Problema 3

1. Se deben cumplir las siguientes ecuaciones:

$$F \cos\alpha = F_R$$

$$F \operatorname{sen}\alpha + N = mg$$

Como $F_R = \mu N$, se tiene que

$$F\cos\alpha = \mu(mg - F\sin\alpha)$$

Por tanto,

$$F_m = \frac{\mu\, m\, \mathrm{g}}{\cos\alpha + \mu \operatorname{sen}\alpha}$$

Derivando:

$$\frac{dF}{d\alpha} = \mu\, m\, \mathrm{g} \frac{\sin\alpha - \mu\cos\alpha}{(\cos\alpha + \mu\operatorname{sen}\alpha)^2}$$

Anulando esta derivada se obtiene el ángulo para fuerza mínima (*trivial comprobar que es mínimo**):

$$\tan\alpha = \mu$$

Y por tanto la fuerza mínima necesaria:

$$F_m = \frac{\mu\, m\, \mathrm{g}}{\cos\alpha + \tan\alpha \operatorname{sen}\alpha} = \frac{\mu\, m\, \mathrm{g}}{\sqrt{1+\mu^2}}$$

En nuestro caso, $\mu = 1$, el ángulo será $\alpha = 45°$ y la fuerza

$$F_m = \frac{\mu\, m\, \mathrm{g}}{\sqrt{1+\mu^2}} = 50\sqrt{2}\,\mathrm{g} \approx 693 \text{ N}$$

2. Si se duplica la fuerza y mantenemos el mismo ángulo α (es decir, $\tan\alpha = \mu$) tendremos que la aceleración, a, satisface le ecuación:

$$m\,a = 2F_m \cos\alpha - \mu(mg - 2F_m \operatorname{sen}\alpha)$$
$$m\,a = 2F_m(\cos\alpha + \mu \operatorname{sen}\alpha) - \mu\, m\, \mathrm{g}$$
$$m\,a = 2\frac{\mu\, m\, \mathrm{g}}{\sqrt{1+\mu^2}}\sqrt{1+\mu^2} - \mu\, m\, \mathrm{g}$$
$$m\,a = 2\,\mu\, m\, \mathrm{g} - \mu\, m\, \mathrm{g} = \mu\, m\, \mathrm{g}$$
$$a = g$$

3. Este es un resultado muy interesante. Para ese valor de la fuerza, $2F_m$, su componente vertical compensa exactamente el peso, $2F_m \sin\alpha = m\,\mathrm{g}$, y no hay fricción, $F_R = 0$. Y la componente horizontal, también equivale al peso, $2F_m \cos\alpha = mg$, ya que en nuestro caso $\operatorname{sen}\alpha = \cos\alpha$. Las fuerzas verticales se compensan y la única resultante, la horizontal mg, arrastra obviamente el armario con aceleración g.

   Puede decirse que ese valor, $2F_m$, es un valor máximo por encima del cual el armario despega del suelo y describiría un movimiento con aceleración vertical y horizontal. Es decir, si aplicamos una fuerza $F > 2F_m$, las aceleraciones vertical y horizontal serían respectivamente $a_v = (F \sin\alpha - mg)/m$ y $a_h = F\cos\alpha/m$.

---

* Puede comprobarse fácilmente que para ese ángulo la fuerza es efectivamente mínima, y además que:

$$\cos\alpha + \tan\alpha \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1+\tan^2\alpha} = \sqrt{1+\mu^2}$$

Veamos:

$$\cos\alpha + \tan\alpha \operatorname{sen}\alpha = \cos(1+\tan^2\alpha)$$
$$\cos\alpha + \tan\alpha \operatorname{sen}\alpha = 1/\cos\alpha$$

Multiplicando ambas y haciendo la raíz cuadrada:

$$\cos\alpha + \tan\alpha \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1+\tan^2\alpha}$$

Es decir, en nuestro caso:

$$\cos\alpha + \tan\alpha \operatorname{sen}\alpha = \sqrt{1+\mu^2}$$
