Problema 1

La distancia horizontal total es la suma de las distancias que recorre antes (d_1) y después (d_2) de soltar la liana.

La primera de ellas se calcula fácilmente:

$$d_1 = L\,\mathrm{sen}\,\theta = 2{,}01\ \mathrm{m}$$

Para obtener d_2 planteamos las ecuaciones del movimiento parabólico situando el origen de coordenadas en el punto donde Tarzán suelta la liana:

$$x = v_0 \cos\theta\, t$$

$$y = v_0\,\mathrm{sen}\,\theta\, t - {}^{\mathrm{g}}\!/_{2}\, t^2$$

donde la velocidad inicial v_0 puede calcularse aplicando el principio de conservación de la energía mecánica:

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 + mgy_0$$

siendo y_0 es la altura alcanzada en el momento de soltar la liana:

$$y_0 = L\,(1 - \cos\theta\ \ ) = 0{,}63\ \mathrm{m}$$

Por tanto, v_0 viene dada por

$$v_0 = \sqrt{v^2 - 2\mathrm{g}y_0} = 9{,}36\ \ \mathrm{m/s}$$

Despejando t en la primera ecuación del movimiento parabólico y sustituyendo en la segunda obtenemos

$$y = x\tan\theta - \frac{\mathrm{g}}{2}\left(\frac{x}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

que nos da la ecuación de la parábola que describe la posición de Tarzán una vez que suelta la liana. La distancia d_2 corresponde al valor de x cuando $y = -y_0 = 0{,}63$ m:

$$-y_0 = d_2\tan\theta - \frac{\mathrm{g}}{2}\left(\frac{d_2}{v_0\cos\theta}\right)^2$$

Despejando d_2 obtenemos una ecuación de 2º grado en la que únicamente la raíz positiva tiene sentido físico. Por lo tanto,

$$d_2 = \frac{v_0\cos\theta}{\mathrm{g}}\left(v_0\,\mathrm{sen}\,\theta + \sqrt{v_0^2\mathrm{sen}^2\theta + 2\mathrm{g}y_0}\right) = 9{,}21\ \mathrm{m}$$

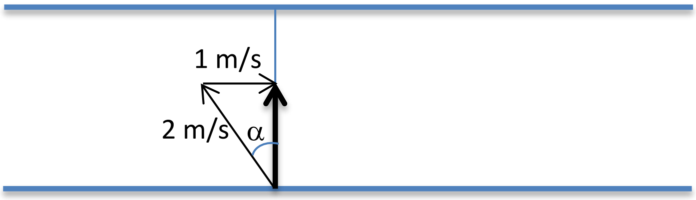
Por tanto, la distancia horizontal total recorrida por Tarzán desde la orilla izquierda del río es

$$D = d_1 + d_2 = 11{,}22\ \mathrm{m}$$

Por tanto, consigue con su salto alcanzar la orilla derecha del río.

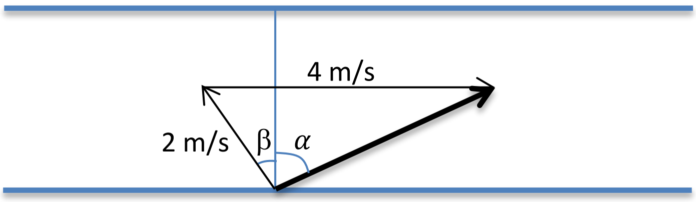
Problema 2

(a) En el primer caso basta hacer que la velocidad resultante, con respecto a las orillas del río, sea perpendicular al mismo. Por tanto, la respuesta es que ha de remar apuntando en una dirección α respecto a la perpendicular al río dada por sin(α)=1/2, es decir 30°, resultando su velocidad respecto a tierra de $v = \sqrt{3} = 1.73$ m/s



(b) El segundo caso es más complicado, pues la velocidad del agua es mayor que la de la barca, y eso hace que nunca pueda alcanzar el punto de la otra orilla situado justamente enfrente. Podemos resolver este apartado, al menos, de dos formas distintas:

Opción 1:



Si llamamos h a la anchura del río, la distancia recorrida por la barca es $d = h/\cos\alpha$. Para que esta distancia sea mínima el ángulo α debe ser mínimo.

A partir de la figura podemos deducir que

$$\tan\alpha = \frac{4 - 2\,\mathrm{sen}\,\beta}{2\cos\beta} = \frac{2 - \mathrm{sen}\,\beta}{\cos\beta}$$

El valor de β que hace que α mínimo también hará $\tan\alpha$ mínimo. Por tanto, podemos obtener dicho valor resolviendo la ecuación

$$\frac{d\tan\alpha}{d\beta} = 0$$

Así pues

$$0 = \tan'\alpha = \frac{-\cos^2\beta + \mathrm{sen}\,\beta\,(2 - \mathrm{sen}\,\beta)}{\cos^2\beta} = \frac{-1 + 2\,\mathrm{sen}\,\beta}{\cos^2\beta} \Rightarrow \mathrm{sen}\,\beta = \frac{1}{2}$$

Por tanto,

$$\beta = \arctan\frac{1}{2} = 30°$$

Nótese que hemos obtenido el mismo ángulo que en el apartado (a).

Sustituyendo este valor en la ecuación para $\tan\alpha$ obtenemos que $\alpha = 60°$, con lo que la velocidad a la que se mueve la barca es

$$v = \sqrt{4^2 - 2^2} = 2\sqrt{3} = 3{,}46\ \mathrm{m/s}$$

Opción 2:

El tiempo necesario para cruzar el río es

$$t = \frac{h}{2\cos\beta}$$

y la distancia d recorrida será:

$$d = \sqrt{h^2 + \left[(4 - 2\,\mathrm{sen}\,\beta)\frac{h}{2\cos\beta}\right]^2}$$

$$\frac{d^2}{h^2} = 1 + \left(\frac{4 - 2\,\mathrm{sen}\,\beta}{2\cos\beta}\right)^2$$

Derivando esta cantidad con respecto al ángulo β e igualando a cero encontramos la condición que debe cumplir β para recorrer la mínima distancia:

$$\frac{(\mathrm{sen}\,\beta - 2)(2\,\mathrm{sen}\,\beta - 1)}{(\cos\beta)^3} = 0$$

Por tanto,

$$\mathrm{sen}\,\beta = \frac{1}{2}$$

pues la otra solución de la ecuación anterior es absurda.

Problema 3

(a) El peso viene dado por

$$P = \rho\,V\,\mathrm{g} = \rho\,\frac{4}{3}\pi R^3 \mathrm{g} = 13{,}1\ \mathrm{N}$$

(b) Para que la fuerza debida al campo eléctrico esté dirigida hacia arriba la carga debe ser negativa. Su módulo se obtiene a partir de la ecuación

$$P = F_e = qE_T$$

Por tanto,

$$q = {}^{P}/_{E_T} = 131\ \mathrm{mC}$$

(c) La carga máxima es aquella para la cual el campo en la superficie del conductor es el de ruptura:

$$E_r = 4\pi k\sigma = 4\pi k\frac{q_{max}}{4\pi R^2} = k\frac{q_{max}}{R^2}$$

Por tanto,

$$q_{max} = \frac{E_r R^2}{k} = 1{,}33 \times 10^{-5}\mathrm{C}$$

(d) Con esta carga la fuerza debida al campo eléctrico es mucho menor que el peso:

$$\frac{F_e}{P} = \frac{q_{max}E_T}{P} = 1{,}01 \times 10^{-4}$$

(e) La razón es proporcional a R^{-1} porque el peso crece con R^3 (proporcional al volumen) y la fuerza eléctrica con R^3 (carga total proporcional a la superficie).