Problema 1: Planeta superenano

(a) Como la pluma y el martillo caen a la vez, el astronauta deduce que el planeta no tiene atmósfera y, por tanto, el movimiento de caída es uniformemente acelerado con la aceleración de la gravedad $\boldsymbol{g}$. Esta aceleración la puede calcular a partir del tiempo de caída:

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow g = \frac{2h}{t^2} = \frac{2 \cdot 1,40}{5,29^2} = 0,100 \ \mathrm{m/s^2}$$

El radio del planeta es $R = 250/2\pi = 39,8\ \mathrm{km}$. La masa del planeta puede obtenerse teniendo en cuenta que

$$g = G\frac{M}{R^2} \Rightarrow M = \frac{gR^2}{G} = \frac{0,10 \cdot (39,8 \times 10^3)^2}{6,67 \times 10^{-11}} = 2,37 \times 10^{18}\ \mathrm{kg}$$

(b) En el ecuador, además de la aceleración de la gravedad $\boldsymbol{g}$ debemos tener en cuenta la aceleración debida al movimiento de rotación

$$g_{rot} = \frac{v^2}{R}$$

La velocidad de giro en el ecuador es $v = \omega R$, donde la velocidad angular ω viene dada por

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{10 \cdot 60 \cdot 60} = 1,74 \times 10^{-4}\ \mathrm{rad/s}$$

Por tanto,

$$g_{rot} = \frac{v^2}{R} = 1,20 \times 10^{-3}\ \mathrm{m/s^2}$$

Como ambas aceleraciones tienen la misma dirección y sentidos opuestos en el ecuador, el tiempo de caída sería:

$$t' = \sqrt{\frac{2h}{g - g_{rot}}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1,40}{0,1 - 1,20 \times 10^{-3}}} = 5,32\ \mathrm{s}$$

(c) Como la única pérdida de energía se produce durante el choque tenemos que

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{mgh_1}{mgh_0} = 0,8$$

Por tanto,

$$\frac{h_2}{h_1} = 0,8 \longrightarrow h_2 = 0,8\, h_1 = 0,896\ \mathrm{m}$$

(d) Una vez lanzada la pelota, esta sigue un movimiento parabólico en el que la velocidad horizontal permanece constante $\boldsymbol{v_x = v_0 \sin 45° = 0,85\ \mathrm{m/s}}$. En cuanto a la componente vertical velocidad, su valor en el momento del choque puede calcularse a partir de

$$\boldsymbol{v_y^2 - v_{oy}^2 = 2gh \longrightarrow v_y = \sqrt{2gh + v_{0y}^2} = 1,00\ \mathrm{m/s}}$$

Después del primer bote esta componente de la velocidad se reducirá debido a la pérdida de energía

$$\boldsymbol{\frac{1}{2} m\, v_y'^2 = 0,8\, \frac{1}{2} m\, v_y^2 \longrightarrow v_y' = \sqrt{0,8}\, v_y = 0,89\ \mathrm{m/s}}$$

Después del primer bote la pelota seguirá una trayectoria de tiro parabólico. El alcance del mismo puede calcularse a partir de las componentes de la velocidad inicial:

$$\boldsymbol{d = \frac{2 v_x v_y'}{g} = 15,17\ \mathrm{m}}$$

Problema 2: Acuático Salamanca: ¿mitad distancia o mitad tiempo?

(a) Denotamos con t_A el tiempo de Alba y t_B el de Blanca.

Sea x la distancia a recorrer. Para Alba, que recorre $x/2$ a V_1 y $x/2$ a V_2 podemos escribir que:

$$\frac{x}{2} = V_1 \cdot t_1 = V_2 \cdot t_2 = \frac{x}{2}$$

Entonces tardará un tiempo:

$$t_A = t_1 + t_2 = \frac{x}{2} \cdot \left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)$$

En el caso de Blanca, llamamos t_B al tiempo que necesita para completar la competición. Como ella ha elegido usar la estrategia de la mitad de tiempo a crawl (V_1) y la otra mitad a braza (V_2) tenemos que:

$$x = x_1 + x_2 = \frac{t_B}{2} \cdot V_1 + \frac{t_B}{2} \cdot V_2$$

De donde podemos despejar el tiempo de Blanca como:[1]

$$t_B = 2x \cdot \left(\frac{1}{V_1 + V_2}\right)$$

Combinando ambas ecuaciones de los tiempos podemos obtener su relación:

$$\frac{t_A}{t_B} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(V_1 + V_2)^2}{V_1 \cdot V_2}$$

En dónde si escribimos que $V_1 = \alpha \cdot V_2$ tendremos una expresión final:[2]

$$\boldsymbol{\frac{t_A}{t_B} = \frac{1}{4} \cdot \frac{(1+\alpha)^2}{\alpha}}$$

(b) El ejercicio se reduce por lo tanto a estudiar esta función. Si hacemos su derivada respecto de α para encontrar el mínimo, éste aparece para $\alpha = \pm 1$ donde obviamente solo tiene sentido $\alpha = 1$ en cuyo caso $V_1 = V_2$ y $t_A = t_B$. Para el resto de valores, $0 < \alpha < \infty$, **la función t_A / t_B es siempre > 1**. Por lo tanto, concluimos que la **ganadora es Blanca**.

[1] Nótese que se trata del concepto de velocidad media.

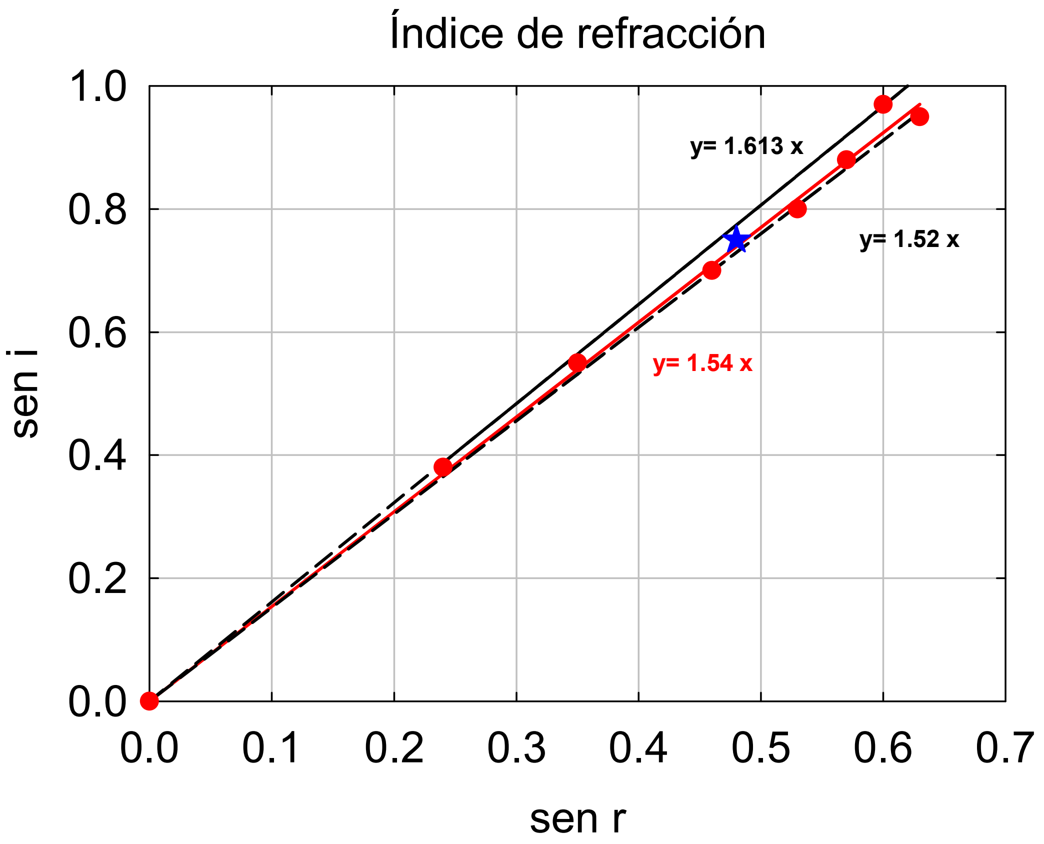
[2] Evidentemente para el caso $\alpha = 1$ (ambas velocidades iguales) las dos nadadoras llegan al mismo tiempo.

Problema 3: Determinación del índice de refracción de un medio transparente

(a) Se completa la tabla:

	i (º)	r (º)	sen i	sen r
1	22,0	14,0	0,375	0,242
2	33,0	20,5	0,545	0,350
3	44,5	27,5	0,701	0,462
4	53,5	32,0	0,804	0,530
5	61,0	35,0	0,875	0,574
6	66,5	37,0	0,917	0,602
7	72,5	39,0	0,954	0,629

(b) y (c) En la siguiente gráfica se ha realizado el correspondiente análisis, donde los puntos rojos corresponden a la tabla anterior y la estrella azul corresponde al punto medio con coordenadas (0,48-0,75).



(d) Dado que la recta buscada ha de pasar por el punto (0,0) tenemos que dibujar, línea roja, la recta que pasa por el origen y el punto medio.

$$\text{sen } i = 1{,}52 \text{ sen } r$$

Al comparar la recta de regresión con la ecuación (2) se observa que:

$$\frac{\boldsymbol{n_2}}{\boldsymbol{n_1}} = 1{,}52$$

Con lo que el índice de refracción es:

$$\boldsymbol{n_2} = 1{,}52$$

Para determinar la incertidumbre se usan las rectas (a trazos negros en la gráfica) que pasan por el origen (0,0) y ajustan la distribución por arriba o por abajo.

pendiente máxima → y = 1,613 x

pendiente mínima → y = 1,54 x

La incertidumbre en la pendiente:

$$\Delta(\text{pendiente}) = (1{,}613 - 1{,}54)/2 = 0{,}036$$

Así tenemos que:

$$\boldsymbol{n_2 = 1{,}52 \pm 0{,}04}$$